第二十届华罗庚金杯少年数学邀请赛

决赛试题 A 参考答案

（小学高年级组）

一、填空题（每小题 10 分，共 80 分）

题号	1	2	3	4	5	6	7	8
答案	$210\frac{10}{19}$	24	10	360	5321，1235	3,12	23	8

二、解答下列各题（每小题 10 分，共 40 分，要求写出简要过程）

9.【答案】这两个自然数是 552, 115 或 232, 435.

【解答】

$$120=2^3\times3\times5，667=1\times23\times29.\qquad（*）$$

设这两个自然数是 da 和 db，其中 a 和 b 是互质，d 是这两个自然数的最大公约数，d 是 667 的因子，且大于 1，小于 667．无妨设 $a>b$，则有：

（1）当 d=23 时，由（*），$a+b=29$，$ab=2^3\times3\times5$，此时易得：$a=24$，$b=5$，这两个自然数是 435, 232.

（2）当 d=29 时，由（*），$a+b=23$，$ab=2^3\times3\times5$，此时易得：$a=15$，$b=8$，这两个自然数是 552, 115.

10. 【答案】300 元/天

【解答】设房间的降价次数为 m（m 是非负整数），则收到的房租是：

$$\begin{aligned}&(100\times50\%+5m)\times(400-20m)\\=&\ 20000+1000m-100m^2\\=&\ 100\times(200+10m-m^2)\end{aligned}$$

（1） m=0，房租=20000；

（2） m=1，房租=20900；

（3） m=2，房租=21600；

（4） m=3，房租=22100；

（5） m=4，房租=22400；

（6） m=5，房租=22500；

（7） m=6，房租=22400；

（8） m=7，房租=22100；

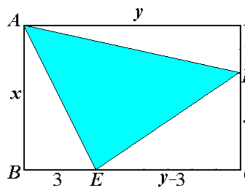
（9） m=8，房租=21600；

（10） m=9，房租=20900；

（11） m=10，房租=20000.

所以，当 m 为 5 时酒店收到的房租费最高，此时的房价为 300 元/天.

11.【答案】三角形 AEF 的面积是 25 cm^2.



【解答】如图,设 $AB=CD=x,\ AD=BC=y$，则

$CF=x-2,\ BE=y-3.$ 且 $xy=56.$

依题意，三角形 AEF 的面积

$$=xy-\frac{1}{2}\times 3x-\frac{1}{2}\times 2y-\frac{1}{2}(x-2)(y-3)$$

$$=xy-\frac{1}{2}\left(3x+2y+xy-2y-3x+6\right)=xy-\frac{1}{2}(xy+6)$$

$$=\frac{1}{2}\left(xy-6\right)=\frac{1}{2}(56-6)=25.$$

12.【答案】能够被 7 整除的有 288 个.

【解答】3^n 被 7 除的余数为 3, 2, 6, 4, 5, 1，每 6 个一循环；n^3 被 7 除的余数为 1,1,6,1,6,6,0,

每 7 个一循环, 6 和 7 互质，$3^n, n^3$ 被 7 除的余数和每 42 个一循环.列表如下:

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14

3^n	1	3	2	6	4	5	1	3	2	6	4	5	1	3	2
n^3	0	1	1	6	1	6	6	0	1	1	6	1	6	6	0

n	15	16	17	18	19	20	21	22	…						29
3^n	6	4	5	1	3	2	6	4	5	1	3	2	6	4	5
n^3	1	1	6	1	6	6	0	1	1	6	1	6	6	0	1

n	30														44
3^n	1	3	2	6	4	5	1	3	2	6	4	5	1	3	2
n^3	1	6	1	6	6	0	1	1	6	1	6	6	0	1	1

每 42 个数中，有 6 个数被 7 整除. 2015 被 42 除商 47 余 41，所以共有 288 个数被 7 整除.

三、解答下列各题（每小题 15 分，共 30 分，要求写出详细过程）

13. 【答案】平行四边形 $ABCD$ 的面积是 $8\dfrac{8}{9}$.

【解答】设 $ABCD$ 的面积是 w,用 S 表示面积.

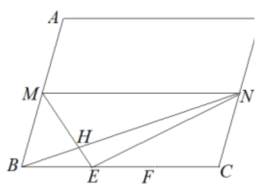


图 a

如图 a,连接 MN 和 NE,由三角形面积公式和已知条件 $AM=MB,DN=CN,BE=EF=FC$,易知：

$$S_{\Delta MNB}=\frac{1}{4}w,\quad S_{\Delta ENB}=\frac{1}{3}\times\frac{1}{4}w=\frac{1}{12}w,$$

$$S_{\Delta BEM}=\frac{1}{6}\times\frac{1}{2}w=\frac{1}{12}w.$$

再由共边定理（可由三角形面积公式推出）,可得：

$$\frac{S_{\Delta BHM}}{S_{\Delta BEM}}=\frac{S_{\Delta MNB}}{S_{\Delta ENB}}=\frac{\frac{1}{4}w}{\frac{1}{12}w}=3,$$

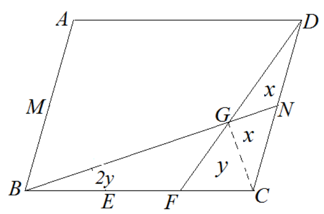


图 b

故

$$\frac{S_{\Delta BHM}}{S_{\Delta BEH}}+1=\frac{S_{\Delta BHM}+S_{\Delta BEH}}{S_{\Delta BEH}}=\frac{\frac{1}{12}w}{S_{\Delta BEH}}=4,\ S_{\Delta BEH}=\frac{1}{48}w.$$

如图 b，连接 CG，设 $S_{\Delta CNG}=x$，$S_{\Delta CFG}=y$，由已知条件 $DN=CN$, $BE=EF=FC$，可以得到：

$$\begin{cases} x+3y=\frac{1}{4}w \\ 2x+y=\frac{1}{6}w \end{cases}，可得：\begin{cases} x=\frac{1}{20}w \\ y=\frac{1}{15}w \end{cases}.$$

所以，

$$1=S_{\Delta EFGH}=S_{\Delta BFG}-S_{\Delta BEH}=2y-\frac{1}{48}w=\left(\frac{2}{15}-\frac{1}{48}\right)w=\frac{1}{3}\times\frac{27}{80}w,\quad w=8\frac{8}{9}$$

14.【答案】"弄"可以代表的数最大是 9.

【解答】将四个成语共 16 个汉字代表的数字相加，总和是 84，若 11 个非零连续自然数中最小的一个不小于 2，则其和不小于 77，则四个成语中，"虚"、"一"、"故"、"如"和"表"都出现两次，

"虚"+"一"+"故"+"如"+"表" ≤84-77=7，　　　　(*)

因为"虚"+"一"+"故"+"如"+"表" ≥2+3+4+5+6=20，和（*）矛盾，故 11 个非零连续自然数中最小的一个是 1，和为 66.

此时，

"虚"+"一"+"故"+"如"+"表"=84-66=18.　　　　(**)

因为"虚"、"一"、"故"、"如"与"表"不可能全为偶数，否则，其和不小于 30，它们之中有一个偶数，四个奇数或者两个奇数，三个偶数.

（1）对于一个偶数，四个奇数的情形. 结合条件"表">"一">"故">"如">"虚"　(**) 有解：

(**) 的第 1 个解："表"=7，"一"=5，"故"=3，"如"=2，"虚"=1.

此时，"表"+"里"+"如"+"一"=14+"里"=21，"里"=7，不可能.

（2）对于两个奇数，三个偶数的情形，可以断定最小的奇数必为 1. 否则，因为三个偶数之和大于等于 12，这样 5 个数之和将不小于 20，不可能. 且另外一个奇数

不可能大于 5，否则，“虚”+“一”+“故”+“如”+“表”≥12+1+7=20，也不可能. 类似可以断定，最小的偶数必为 2. 此时，结合条件“表”>“一”>“故”>“如”>“虚”，（2）有解：

（**）的第 2 个解：“虚”=1，“如”=2，“故”=3，“一”=4，“表”=8；

（**）的第 3 个解：“虚”=1，“如”=2，“故”=4，“一”=5，“表”=6，

将（**）的第 2 个解代入成语 “一见如故”，“一”+“见”+“如”+“故”= 9+“见”=21，不可能；

将（**）的第 3 个解代入 4 个成语，

代入“表里如一”，“表”+“里”+“如”+“一”=6+“里”+2+5，得到“里”=8;

代入“一见如故”，“一”+“见”+“如”+“故”=5+“见”+2+4，得到“见”=10;

代入“虚有其表”，“虚”+“有”+“其”+“表”=1+“有”+“其”+6，“有”+“其”=14; 得到{“有”，“其”}={11，3}；

代入“故弄玄虚”，“故”+“弄”+“玄”+“虚”=4+“弄”+“玄”+1，“弄”+“玄”=16，得到{“弄”，“玄”}=9，“玄”=7.

所以，“弄”可以代表的数最大是 9.