

第十二届小学“希望杯”全国数学邀请赛

参考答案及评分标准

五年级 第2试

一、填空题(每小题5分。其中第4题,每空2.5分。)

题号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
答案	126	19	10	2014;4026	6	80	8.25	156	9.75	1728	48	13

二、解答题

13. (1) 最初,圆周上有3个数。

第1次操作后,圆周上有

$$3 + 3 = 6(\text{个}) \text{数};$$

第2次操作后,圆周上有

$$6 + 6 = 12(\text{个}) \text{数};$$

第3次操作后,圆周上有

$$12 + 12 = 24(\text{个}) \text{数。} \quad (8 \text{分})$$

(2) 每次操作,新增的数是原来相邻的两个数的和,而原来的数各被加了2次,则新增的数的和是原来的数的和的2倍,即操作后圆周上的数的和是原来的3倍。

最初,圆周上的3个数的和是

$$1 \times 3 = 3.$$

第1次操作后,圆周上的数的和是

$$3 \times 3 = 9;$$

第2次操作后,圆周上的数的和是

$$3 \times 9 = 27;$$

第3次操作后,圆周上的数的和是

$$3 \times 27 = 81. \quad (15 \text{分})$$

14. (1) 甲走一圈用

$$360 \div 30 = 12(\text{分}),$$

丙走一圈用 $360 \div 90 = 4(\text{分})$ 。

12和4的最小公倍数是12,所以,12分钟后,甲、丙第一次同时回到出发点。 (5分)

(2) 丙走一圈用

$$360 \div 50 = 7.2(\text{分}).$$

被12,7.2,4除,商都是大于零的整数,满足此条件的被除数最小是36。所以,36分钟后,三人第一次同时回到出发点。 (10分)

(3) 当三人第一次同时到达同一地点时,他们各自走过的路程除以360所得的余数相同。

设三人走了 x 分钟,根据同余性质,有

$$360 \mid (50x - 30x), 18 \mid x;$$

$$360 \mid (90x - 50x), 9 \mid x;$$

$$360 \mid (90x - 30x), 6 \mid x.$$

18,9,6的最小公倍数是18。所以,18分钟后三人第一次同时到达同一地点。 (15分)

15. 解法1 因为胜者加分,负者减同样的分,所以两队积分的和不变。 (5分)

若甲队胜,则甲队的积分是乙队的3倍,可知两队的积分和是4的倍数;若乙队胜,则甲队的积分是乙队的2倍,可知两队的积分和也是3的倍数。所以,两队的积分和是 $3 \times 4 = 12$ 的倍数,即可能是12,24,36,48分。讨论如下:

(10分)

(1) 两队的积分和是12分

在甲队胜的情况下,甲队的积分是

$$12 \div 4 \times 3 = 9(\text{分});$$

在乙队胜的情况下,甲队的积分是

$$12 \div 3 \times 2 = 8(\text{分}),$$

那么,本场比赛加分或减分的分值是

$$(9 - 8) \div 2 = 0.5(\text{分}),$$

不符合题意。

(2) 两队的积分和是24分

在甲队胜的情况下,甲队的积分是

$$24 \div 4 \times 3 = 18(\text{分});$$

在乙队胜的情况下,甲队的积分是

$$24 \div 3 \times 2 = 16(\text{分}),$$

那么,本场比赛加分或减分的分值是

$$(18 - 16) \div 2 = 1(\text{分}),$$

赛前甲队的积分是

$$18 - 1 = 17(\text{分}),$$

乙队的积分是

$$24 - 17 = 7(\text{分}).$$

(3) 两队的积分和是 36 分

在甲队胜的情况下,甲队的积分是

$$36 \div 4 \times 3 = 27(\text{分}),$$

在乙队胜的情况下,甲队的积分是

$$36 \div 3 \times 2 = 24(\text{分}),$$

那么,本场比赛加分或减分的分值是

$$(27 - 24) \div 2 = 1.5(\text{分}),$$

不符合题意。

(4) 两队的积分和是 48 分

在乙队胜的情况下,甲队的积分是

$$48 \div 3 \times 2 = 32(\text{分}),$$

甲队赛前积分大于 32 分,不符合题意。

综上可知,赛前甲队、乙队的积分分别是 17 分和 7 分。 (15 分)

解法 2 设甲队赛前积分为 x 分,乙队赛前积分为 y 分,本场比赛加分或减分的分值为 n 分(x, y, n 都是整数)。

根据题设条件,得

$$x + n = 3(y - n), \quad \text{①}$$

$$x - n = 2(y + n), \quad \text{②}$$

(8 分)

① - ②,得

$$2n = 3y - 3n - 2y - 2n,$$

解得 $y = 7n, x = 17n$ 。 (10 分)

因为赛前两队的积分都少于 25 分,所以 n 只能取 1。即赛前甲队积分为 17 分,乙队积分为 7 分。 (15 分)

16. 甲每秒游

$$100 \div 200 = 0.5(\text{米}),$$

乙每秒游

$$100 \div 160 = 0.625(\text{米}),$$

乙每秒比甲多游

$$0.625 - 0.5 = 0.125(\text{米}),$$

乙第 1 次追上甲,用

$$40 \div 0.125 = 320(\text{秒}), \quad (5 \text{分})$$

在这个时间内,甲游了

$$320 \times 0.5 = 160(\text{米}),$$

还剩 $1000 - 160 - 40 = 800(\text{米})$;

乙第 2 次追上甲(距离差是 100 米),用

$$100 \div 0.125 = 800(\text{秒}), \quad (10 \text{分})$$

在这个时间内,甲游了

$$800 \times 0.5 = 400(\text{米}),$$

此时,甲还剩

$$800 - 400 = 400(\text{米}),$$

到此,可知乙还可再追上甲 1 次。

综上可知,甲被乙追上 3 次。 (15 分)