

海淀区 2020~2021 学年第一学期期中练习

高三数学参考答案

2020.11

一、选择题共 10 小题，每小题 4 分，共 40 分。

题号	(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)	(8)	(9)	(10)
答案	A	C	C	D	B	C	A	B	A	B

二、填空题共 5 小题，每小题 5 分，共 25 分。

题号	(11)	(12)	(13)	(14)	(15)
答案	$\sqrt{2}$	-3	25	$\frac{3}{4}$ 1	$\frac{2}{3}\pi$ $\frac{3}{2}\pi$

三、解答题共 6 小题，共 85 分。

(16) (本小题共 14 分)

解：(I) 由正弦定理得： $\frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$.

因为 $\sin B = 2\sin C$,

所以 $b = 2c$.

因为 $\cos A = \frac{3}{4}$, $0 < A < \pi$,

所以 $\sin A = \sqrt{1 - \cos^2 A} = \frac{\sqrt{7}}{4}$.

因为 $S = \sqrt{7}$,

所以 $S = \frac{1}{2}bc\sin A = \frac{1}{2} \times 2c^2 \times \sin A = \sqrt{7}$.

所以 $c^2 = 4$.

所以 $c = 2$.

(II) 由 (I) 知 $b = 2c$.

因为 $\cos A = \frac{3}{4}$,

所以 $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A = 4c^2 + c^2 - 4c^2 \times \frac{3}{4} = 2c^2$.

所以 $a = \sqrt{2}c$.

所以 $\frac{a}{c} = \sqrt{2}$.

(17) (本小题共 14 分)

解：(I) 设等差数列 $\{a_n\}$ 的公差为 d , 则 $a_n = a_1 + (n-1)d$.

因为 $a_5 = 9$, $a_3 + a_9 = 22$,

$$\text{所以 } \begin{cases} a_1 + 4d = 9, \\ 2a_1 + 10d = 22. \end{cases}$$

$$\text{解得: } \begin{cases} a_1 = 1, \\ d = 2. \end{cases}$$

所以 $a_n = 2n - 1$.

(II) 选择①②

设等比数列 $\{a_n\}$ 的公比为 q .

因为 $b_1 = a_1$, $b_3 = a_1 + a_2$,

所以 $b_1 = 1$, $b_3 = 4$.

因为 $S_3 = 7$,

所以 $b_2 = S_3 - b_1 - b_3 = 2$.

$$\text{所以 } q = \frac{b_2}{b_1} = 2.$$

$$\text{所以 } S_n = \frac{b_1(1 - q^n)}{1 - q} = 2^n - 1.$$

因为 $S_n < 2020$,

所以 $2^n - 1 < 2020$.

所以 $n \leq 10$.

即 n 的最大值为 10.

选择①③

设等比数列 $\{a_n\}$ 的公比为 q .

因为 $b_1 = a_1$, $b_3 = a_1 + a_2$,

所以 $b_1 = 1$, $b_3 = 4$.

$$\text{所以 } q^2 = \frac{b_3}{b_1} = 4, \quad q = \pm 2.$$

因为 $b_{n+1} > b_n$,

所以 $q=2$.

$$\text{所以 } S_n = \frac{b_1(1-q^n)}{1-q} = 2^n - 1.$$

因为 $S_n < 2020$,

所以 $2^n - 1 < 2020$.

所以 $n \leq 10$.

即 n 的最大值为 10.

选择②③

设等比数列 $\{a_n\}$ 的公比为 q .

因为 $S_3 = 7$, $b_1 = 1$,

所以 $1 + q + q^2 = 7$.

所以 $q = 2$, 或 $q = -3$.

因为 $b_{n+1} > b_n$,

所以 $q = 2$.

$$\text{所以 } S_n = \frac{b_1(1-q^n)}{1-q} = 2^n - 1.$$

因为 $S_n < 2020$,

所以 $2^n - 1 < 2020$

所以 $n \leq 10$.

即 n 的最大值为 10.

(18) (本小题共 14 分)

解: (I) 因为 $e^x > 0$,

由 $f(x) = e^x(2x^2 - 3x) > 0$, 得 $2x^2 - 3x > 0$.

所以 $x < 0$, 或 $x > \frac{3}{2}$.

所以 不等式 $f(x) > 0$ 的解集为

$$\{x | x < 0, \text{ 或 } x > \frac{3}{2}\}.$$

(II) 由 $f(x) = e^x(2x^2 - 3x)$ 得: $f'(x) = e^x(2x^2 + x - 3)$

$$= e^x(2x+3)(x-1).$$

令 $f'(x)=0$, 得 $x=1$, 或 $x=-\frac{3}{2}$ (舍).

$f(x)$ 与 $f'(x)$ 在区间 $[0,2]$ 上的情况如下:

x	0	(0,1)	1	(1,2)	2
$f'(x)$		-	0	+	
$f(x)$	0	$\searrow$	$-e$	$\nearrow$	$2e^2$

所以 当 $x=1$ 时, $f(x)$ 取得最小值 $f(1)=-e$;

当 $x=2$ 时, $f(x)$ 取得最大值 $f(2)=2e^2$.

(19) (本小题共 14 分)

解: (I) 因为 $y=\sin x$ 的单调递减区间为 $[2k\pi+\frac{\pi}{2}, 2k\pi+\frac{3\pi}{2}]$ ($k \in \mathbf{Z}$).

所以 $2k\pi+\frac{\pi}{2} \leq x+\frac{\pi}{6} \leq 2k\pi+\frac{3\pi}{2}$, $k \in \mathbf{Z}$.

所以 $2k\pi+\frac{\pi}{3} \leq x \leq 2k\pi+\frac{4\pi}{3}$, $k \in \mathbf{Z}$.

所以 函数 $f(x)$ 的单调递减区间为 $[2k\pi+\frac{\pi}{3}, 2k\pi+\frac{4\pi}{3}]$ ($k \in \mathbf{Z}$).

(II) 因为 $f(x)=2\sin(x+\frac{\pi}{6})$,

所以 $f(x-\frac{\pi}{6})=2\sin x$.

因为 $g(x)=f(x)f(x-\frac{\pi}{6})$,

所以 $g(x)=4\sin(x+\frac{\pi}{6})\sin x$

$$=4(\frac{\sqrt{3}}{2}\sin x+\frac{1}{2}\cos x)\sin x$$

$$=2\sqrt{3}\sin^2 x+2\cos x\sin x$$

$$=\sqrt{3}(1-\cos 2x)+\sin 2x$$

$$=2\sin(2x-\frac{\pi}{3})+\sqrt{3}.$$

因为 $0 \leq x \leq m$,

所以 $-\frac{\pi}{3} \leq 2x-\frac{\pi}{3} \leq 2m-\frac{\pi}{3}$.

因为 $g(x)$ 的取值范围为 $[0, 2+\sqrt{3}]$,

所以 $\sin(2x - \frac{\pi}{3})$ 的取值范围为 $[-\frac{\sqrt{3}}{2}, 1]$.

所以 $\frac{\pi}{2} \leq 2m - \frac{\pi}{3} \leq \frac{4\pi}{3}$.

解得: $\frac{5\pi}{12} \leq m \leq \frac{5\pi}{6}$.

所以 m 的最大值为 $\frac{5\pi}{6}$.

(20) (本小题共 14 分)

解: 由 $f(x) = ax^3 - 3ax^2 + 2 + 4a$ 可得: $f'(x) = 3ax^2 - 6ax = 3ax(x - 2)$.

(I) 当 $a = -1$ 时, $f(3) = -2$, $f'(3) = -9$.

所以 曲线 $y = f(x)$ 在点 $(3, f(3))$ 处的切线方程为 $y = -9x + 25$.

(II) ①当 $a = 0$ 时, $f(x) = 2$ 在 $\mathbf{R}$ 上不具有单调性.

②当 $a > 0$ 时, 令 $f'(x) = 0$ 得 $x_1 = 0, x_2 = 2$.

$f(x)$ 与 $f'(x)$ 在区间 $(-\infty, +\infty)$ 上的情况如下:

x	$(-\infty, 0)$	0	$(0, 2)$	2	$(2, +\infty)$
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$	$\nearrow$	极大值	$\searrow$	极小值	$\nearrow$

因为 $f(x)$ 在 $(a, a+3)$ 上具有单调性,

所以 $a \geq 2$.

③当 $a < 0$ 时,

$f(x)$ 与 $f'(x)$ 在区间 $(-\infty, +\infty)$ 上的情况如下:

x	$(-\infty, 0)$	0	$(0, 2)$	2	$(2, +\infty)$
$f'(x)$	-	0	+	0	-
$f(x)$	$\searrow$	极小值	$\nearrow$	极大值	$\searrow$

因为 $f(x)$ 在 $(a, a+3)$ 上具有单调性,

所以 $a+3 \leq 0$, 即 $a \leq -3$.

综上所述, a 的取值范围是 $(-\infty, -3] \cup [2, +\infty)$.

(III) 先证明: $f(x_1) + f(x_2) \geq 4$.

由 (II) 知, 当 $a > 0$ 时, $f(x)$ 的递增区间是 $(-\infty, 0)$, $(2, +\infty)$, 递减区间是 $(0, 2)$.

因为 $x_1 + x_2 > 2$, 不妨设 $x_1 \leq x_2$, 则 $x_2 > 1$.

①若 $x_1 \leq 0$ ，则 $x_2 > 2 - x_1 \geq 2$.

所以 $f(x_1) + f(x_2) > f(x_1) + f(2 - x_1) = 4 + 4a > 4$.

②若 $x_1 > 0$ ，因为 $x_2 > 1$,

所以 $f(x_1) + f(x_2) \geq f(2) + f(2) = 4$ ，当且仅当 $x_1 = x_2 = 2$ 时取等号.

综上所述， $f(x_1) + f(x_2) \geq 4$.

再证明： $f(x_1) + f(x_2)$ 的取值范围是 $[4, +\infty)$.

假设存在常数 m ($m \geq 4$)，使得对任意 $x_1 + x_2 > 2$ ， $f(x_1) + f(x_2) \leq m$.

取 $x_1 = 2$ ，且 $x_2 > 2 + \sqrt{\frac{m-4}{a}}$ ，则

$$\begin{aligned} f(2) + f(x_2) &= 2 + ax_2^3 - 3ax_2^2 + 2 + 4a \\ &= 2 + ax_2(x_2 - 2)^2 + a(x_2 - 2)^2 + 2 > a(x_2 - 2)^2 + 4 > m, \end{aligned}$$

与 $f(x_1) + f(x_2) \leq m$ 矛盾.

所以 $f(x_1) + f(x_2)$ 的取值范围是 $[4, +\infty)$.

(21) (本小题共 15 分)

解：(I) 取 $i=1, j=2$ ，则存在 a_k ($2 < k < 4$)，使得 $a_k = 2a_2 - a_1$ ，即 $a_3 = 2a_2 - a_1$.

因为 $a_1 = a = 3$ ， $a_2 = b = 5$ ，

所以 $a_3 = 2a_2 - a_1 = 7$.

(II) 假设 $\{a_n\}$ 中仅有有限项为 0，不妨设 $a_m = 0$ ，且当 $n > m$ 时， a_n 均不为 0，则 $m \geq 2$.

取 $i=1, j=m$ ，则存在 a_k ($m < k < 2m$)，使得

$a_k = 2a_m - a_1 = 0$ ，与 $a_k \neq 0$ 矛盾.

(III) ①当 $a < b$ 时，首先证明数列 $\{a_n\}$ 是递增数列，即证 $\forall n \in \mathbf{N}^*$ ， $a_n < a_{n+1}$ 恒成立.

若不然，则存在最小的正整数 n_0 ，使得 $a_{n_0} \geq a_{n_0+1}$ ，且 $a_1 < a_2 < \cdots < a_{n_0}$.

显然 $n_0 \geq 2$. 取 $j = n_0, i = 1, 2, \cdots, n_0 - 1$ ，则存在 a_k ($n_0 < k < 2n_0$)，使得

$$a_k = 2a_{n_0} - a_i.$$

因为 $2a_{n_0} - a_1 > 2a_{n_0} - a_2 > \cdots > 2a_{n_0} - a_{n_0-1} > a_{n_0}$,

所以 $2a_{n_0} - a_1, 2a_{n_0} - a_2, \cdots, 2a_{n_0} - a_{n_0-1}$ 这 $n_0 - 1$ 个不同的数恰为

$a_{n_0+1}, a_{n_0+2}, \cdots, a_{2n_0-1}$ 这 $n_0 - 1$ 项.

所以 $a_{n_0+1} > a_{n_0}$, 与 $a_{n_0+1} \leq a_{n_0}$ 矛盾.

所以 数列 $\{a_n\}$ 是递增数列.

再证明: $a_n = a + (n-1)(b-a), n=1, 2, 3, \cdots$.

记 $d = b - a$, 即证 $a_n = a + (n-1)d, n=1, 2, 3, \cdots$.

当 $n=1, 2$ 时, 结论成立.

假设存在最小的正整数 m_0 , 使得 $a_n = a + (n-1)d$ 对任意 $1 \leq n \leq m_0$ 恒成立,

但 $a_{m_0+1} \neq a + m_0d$, 则 $m_0 \geq 2$.

取 $j = m_0, i = 1, 2, \cdots, m_0 - 1$, 则存在 a_k ($m_0 < k < 2m_0$), 使得 $a_k = 2a_{m_0} - a_i$.

因为 数列 $\{a_n\}$ 是递增数列,

所以 $a_1 < a_2 < \cdots < a_{m_0} < a_{m_0+1} < \cdots < a_{2m_0-1}$.

所以 $2a_{m_0} - a_{m_0-1} < \cdots < 2a_{m_0} - a_2 < 2a_{m_0} - a_1$.

因为 $2a_{m_0} - a_{m_0-1}, \cdots, 2a_{m_0} - a_2, 2a_{m_0} - a_1$ 这 $m_0 - 1$ 个数恰为

$a_{m_0+1}, a_{m_0+2}, \cdots, a_{2m_0-1}$ 这 $m_0 - 1$ 项.

所以 $a_{m_0+1} = 2a_{m_0} - a_{m_0-1} = 2[a + (m_0-1)d] - [a + (m_0-2)d] = a + m_0d$,

与 $a_{m_0+1} \neq a + m_0d$ 矛盾.

所以 $a_n = a + (n-1)(b-a), n=1, 2, 3, \cdots$.

②当 $a > b$ 时, 令 $b_n = -a_n, n=1, 2, 3, \cdots$, 则 $b_1 = -a, b_2 = -b$, 且 $b_1 < b_2$.

对于 $\{b_n\}$ 中任意两项 b_i, b_j ($i < j$),

因为 对任意 $a_i, a_j (i < j)$, 存在 $a_k (j < k < 2j)$, 使得 $a_k = 2a_j - a_i$,

所以 $-a_k = -2a_j - (-a_i)$, 即存在 $b_k (j < k < 2j)$, 使得 $b_k = 2b_j - b_i$.

因此 数列 $\{b_n\}$ 满足题设条件.

由①可知 $b_n = -a + (n-1)(a-b), n=1, 2, 3, \cdots$,

所以 $a_n = a + (n-1)(b-a), n=1, 2, 3, \cdots$.

综上所述, $a_n = a + (n-1)(b-a), n=1, 2, 3, \cdots$.

经检验, 数列 $\{a_n\}$ 满足题设条件.