2019 北京市朝阳区高三一模

数　　学（文）

2019．3

本试卷共 4 页，150 分。考试时长 120 分钟。考生务必将答案答在答题卡上，在试卷上作答无效。考试结束后，将本试卷和答题卡一并交回。

第一部分（选择题 共 40 分）

一、选择题：本大题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分．在每小题列出的四个选项中，选出符合题目要求的一项．

1. 在复平面内，复数 $z=\dfrac{1+2\mathrm{i}}{\mathrm{i}}$ 对应的点位于

A. 第一象限　　B. 第二象限　　C. 第三象限　　D. 第四象限

2. 设实数 x,y 满足不等式组 $\begin{cases} y\ge 0, \\ x-y+1\ge 0, \\ x+y-1\le 0. \end{cases}$ 则 $2x+y$ 的最大值是

A. 1　　B. 2　　C. 3　　D. 4

3. 已知集合 $A=\{1,2,3,4,5\}$，且 $A\cap B=A$，则集合 B 可以是

A. $\{x\,|\,2^x>1\}$　　B. $\{x\,|\,x^2>1\}$　　C. $\{x\,|\,\log_2 x>1\}$　　D. $\{1,2,3\}$

4. 已知 $\triangle ABC$ 中，$\angle A=120^\circ$，$a=\sqrt{21}$，三角形 ABC 的面积为 $\sqrt{3}$．且 $b<c$．则 $c-b=$

A. $\sqrt{17}$　　B. 3　　C. -3　　D. $-\sqrt{17}$

5. 已知 $a,b,c\in\mathbf{R}$，给出下列条件：① $a^2>b^2$；② $\dfrac{1}{a}<\dfrac{1}{b}$；③ $ac^2>bc^2$，则使得 $a>b$ 成立的充分而不必要条件是

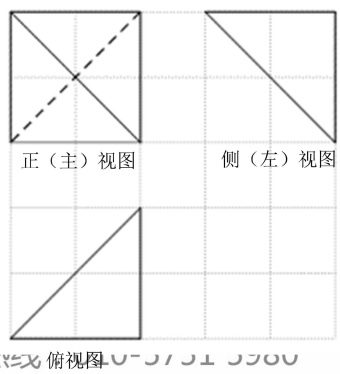
A. ①　　B. ②　　C. ③　　D. ①②③

6. 某三棱锥的三视图如图所示，若网格纸上小正方形的边长为1，则该三棱锥的体积为

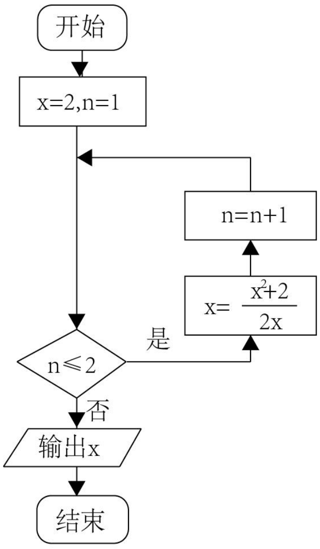
A. 4

B. 2

C. $\dfrac{8}{3}$



D. $\dfrac{4}{3}$



第10题图

7. 已知圆 $C:(x-2)^2+y^2=2$，直线 $l:y=kx-2$．若直线 l 上存在点 P，过点 P 引圆的两条的切线 l_1,l_2，使得 $l_1\perp l_2$，则实数 k 的取值范围是

A. $[0,2-\sqrt{3})\cup(2+\sqrt{3},+\infty)$　B. $[2-\sqrt{3},2+\sqrt{3}]$　C. $(-\infty,0)$　D. $[0,+\infty)$

8. 某单位周一、周二、周三开车上班的职工人数分别是 14，10，8. 若这三天中至少有一天开车上班的职工人数是 20，则这三天都开车上班的职工人数至多是

A. 5　B. 6　C. 7　D. 8

第二部分（非选择题 共 110 分）

二、填空题：本大题共 6 小题，每小题 5 分，共 30 分．把答案填在答题卡上．

9. 已知平面向量 $\boldsymbol{a}=(2,-1)$，$\boldsymbol{b}=(1,x)$．若 $\boldsymbol{a}\parallel\boldsymbol{b}$，则 $x=$_____.

10. 执行如图所示的程序框图，则输出的 x 值为_____.

11. 双曲线 $\dfrac{x^2}{4}-y^2=1$ 的右焦点到其一条渐近线的距离是______.

12. 能说明“函数 $f(x)$ 的图象在区间 $[0,2]$ 上是一条连续不断的曲线，若 $f(0)\cdot f(2)>0$，则 $f(x)$ 在区间 $(0,2)$ 内无零点”为假命题的一个函数是_________.

13. 天坛公园是明、清两代皇帝“祭天”“祈谷”的场所．天坛公园中的圜丘台共有三层（如图 1 所示），上层坛的中心是一块呈圆形的大理石板，从中心向外围以扇面形石铺成（如图 2 所示）．上层坛从第一环至第九环共有九环，中层坛从第十环至第十八环共有九环，下层坛从第十九环至第二十七环共有九环；第一环的扇面形石有 9 块，从第二环起，每环的扇面形石块数比前一环多 9 块，则第二十七环的扇面形石块数是______；上、中、下三层坛所有的扇面形石块数是_______.

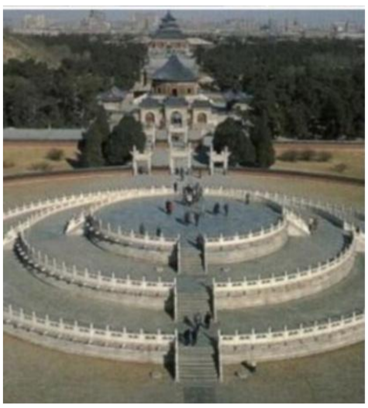


图 1


图 2

14. 若不等式 $\log_a x+x-4>0$（$a>0$ 且 $a\neq 1$）在区间 $(0,2)$ 内有解，则实数 a 的取值范围是________.

三、解答题：本大题共 6 小题，共 80 分．解答应写出文字说明，演算步骤或证明过程.

15.（本小题满分 13 分）

已知函数 $f(x)=\cos^2 x+\sqrt{3}\sin x\cos x$.

（Ⅰ）求 $f(\frac{\pi}{3})$ 的值及 $f(x)$ 的最小正周期;

（Ⅱ）若函数 $f(x)$ 在区间 $[0,m]$ 上单调递增，求实数 m 的最大值.

16. （本小题满分 13 分）

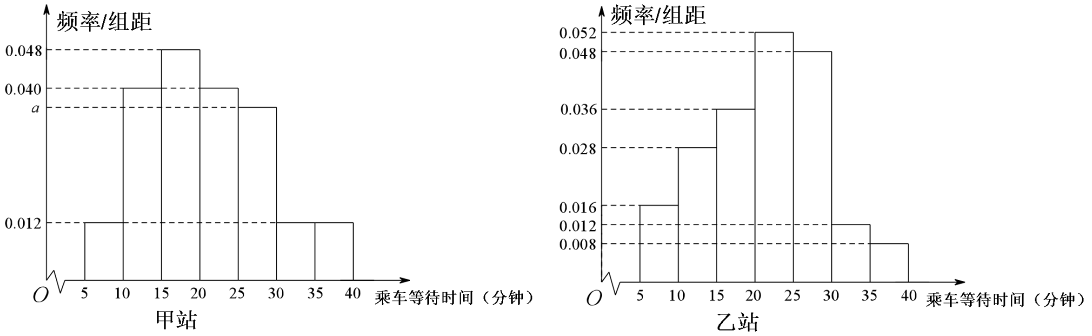
在等比数列 $\{a_n\}$ 中，$a_1=\frac{1}{2},a_4=4$，$n\in\mathbf{N}^*$.

(I）求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式;

(II）设 $b_n=a_n+n-6$，数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和为 S_n，若 $S_n>0$，求 n 的最小值.

17. （本小题满分 13 分）

某部门在同一上班高峰时段对甲、乙两座地铁站各随机抽取 50 名乘客，统计其乘车等待时间（指乘客从进站口到乘上车的时间，乘车等待时间不超过 40 分钟）．将统计数据按 $[5,10),[10,15),[15,20),\cdots,[35,40]$ 分组，制成频率分布直方图：



（Ⅰ）求 a 的值；

（Ⅱ）记 A 表示事件“在上班高峰时段某乘客在甲站乘车等待时间少于 20 分钟”，试估计 A 的概率；

（Ⅲ）假设同组中的每个数据用该组区间的左端点值来估计，记在上班高峰时段甲、乙两站各抽取的 50 名乘客的平均等待时间分别为 $\overline{X_1}$，$\overline{X_2}$，求 $\overline{X_1}$ 的值，并直接写出 $\overline{X_1}$ 与 $\overline{X_2}$ 的大小关系.

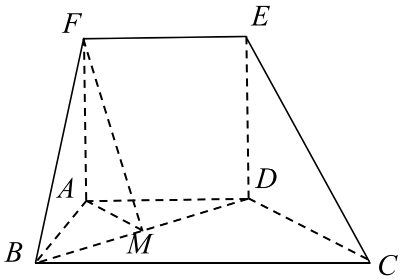
18. （本小题满分 14 分）

如图，在多面体 $ABCDEF$ 中，平面 $ADEF\perp$ 平面 $ABCD$，四边形 $ADEF$ 为正方形，四边形 $ABCD$ 为梯形，且 $AD//BC$，$\angle BAD=90^\circ$，$AB=AD=1$，$BC=2$.

（Ⅰ）求证：$AF\perp CD$；

（Ⅱ）若 M 为线段 BD 的中点，求证：$CE//$平面 AMF；

（Ⅲ）求多面体 $ABCDEF$ 的体积.



19. （本小题满分 13 分）

已知函数 $f(x)=ae^x-4x$，$a\in\mathbf{R}$.

（Ⅰ）求函数 $f(x)$ 的单调区间；

（Ⅱ）当 $a=1$ 时，求证：曲线 $y=f(x)$ 在抛物线 $y=-x^2-1$ 的上方.

20. （本小题满分 14 分）

已知点 $M(x_0,y_0)$ 为椭圆 $C:\dfrac{x^2}{2}+y^2=1$ 上任意一点，直线 $l:x_0x+2y_0y=2$ 与圆 $(x-1)^2+y^2=6$ 交于 A,B 两点，点 F 为椭圆 C 的左焦点.

（Ⅰ）求椭圆 C 的离心率及左焦点 F 的坐标；

（Ⅱ）求证：直线 l 与椭圆 C 相切；

（Ⅲ）判断 $\angle AFB$ 是否为定值，并说明理由.

数学试题答案

一、选择题（40 分）

题号	1	2	3	4	5	6	7	8
答案	D	B	A	B	C	D	D	B

二、填空题（30 分）

题号	9	10	11	12	13	14
答案	$-\frac{1}{2}$	$\frac{17}{12}$	1	$y=(x-1)^2$ （答案不唯一）	243；3402	$(0,1)\cup(1,\sqrt{2})$

三、解答题（80 分）

15. （本小题满分 13 分）

解：（Ⅰ）由已知 $f(\frac{\pi}{3})=\cos^2\frac{\pi}{3}+\sqrt{3}\sin\frac{\pi}{3}\cos\frac{\pi}{3}=\frac{1}{4}+\frac{3}{4}=1$.

因为 $f(x)=\frac{1+\cos 2x}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\sin 2x=\sin(2x+\frac{\pi}{6})+\frac{1}{2}$,

所以函数 $f(x)$ 的最小正周期为 π. ……………………………..7 分

（II）由 $2k\pi-\frac{\pi}{2}\leqslant 2x+\frac{\pi}{6}\leqslant 2k\pi+\frac{\pi}{2}$ 得,

$k\pi-\frac{\pi}{3}\leqslant x\leqslant k\pi+\frac{\pi}{6}$，$k\in\mathbf{Z}$.

所以，函数 $f(x)$ 的单调增区间为 $\left[k\pi-\frac{\pi}{3},k\pi+\frac{\pi}{6}\right]$，$k\in\mathbf{Z}$.

当 $k=0$ 时，函数 $f(x)$ 的单调增区间为 $\left[-\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{6}\right]$,

若函数 $f(x)$ 在区间 $[0,m]$ 上单调递增，则 $[0,m]\subseteq\left[-\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{6}\right]$,

所以实数 m 的最大值为 $\frac{\pi}{6}$. ………………………….. 13 分

16. （本小题满分 13 分）

解：

（I）由数列$\{a_n\}$为等比数列，且$a_1=\frac{1}{2}$，$a_4=4$，得$a_4=a_1q^3=4$，解得$q=2$.

则数列$\{a_n\}$的通项公式$a_n=a_1q^{n-1}=2^{n-2}$，$n\in\mathbf{N}^*$. ………………..5 分

（II） $b_n=a_n+n-6=n-6+2^{n-2}$

$S_n=(-5-4+\cdots+n-6)+(2^{-1}+2^0+\cdots+2^{n-2})$

$=\frac{n(n-11)}{2}+\frac{2^n-1}{2}$.

当$n\geq 5$时，$\frac{n(n-11)}{2}\geq -15$，$\frac{2^n-1}{2}\geq\frac{31}{2}$，所以$S_n>0$；

当$n=4$时，$S_4=\frac{-4\times 7+2^4-1}{2}<0$；

当$n=3$时，$S_3=\frac{-3\times 8+2^3-1}{2}<0$；

当$n=2$时，$S_2=\frac{-2\times 9+2^2-1}{2}<0$；

当$n=1$时，$S_1=\frac{-1\times 10+2^1-1}{2}<0$.

所以，n的最小值为5 .…………………………..13 分

17. （本小题满分 13 分）

（Ⅰ）因为$0.012\times 5\times 3+0.040\times 5\times 2+0.048\times 5+a\times 5=1$，

所以a=0.036 .…………………………..4 分

（Ⅱ）由题意知，该乘客在甲站平均等待时间少于 20 分钟的频率为

$(0.012+0.040+0.048)\times 5=0.5$，故$P(A)$的估计值为$0.5$.…………..8 分

（III）

$\overline{X_1}=(0.012\times 5+0.040\times 10+0.048\times 15+0.040\times 20+0.036\times 25+0.012\times 30+0.012\times 35)\times 5$

$=18.3$.

由直方图知：$\overline{X_1}<\overline{X_2}$ …………………………..13 分

18. （本小题满分 14 分）

解：（Ⅰ）证明：因为四边形 $ADEF$ 为正方形，所以 $AF \perp AD$．

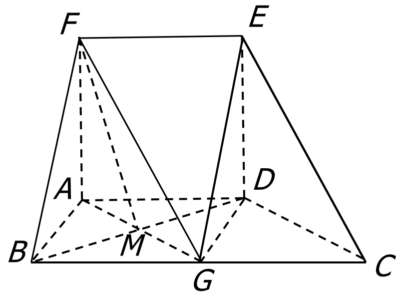
又因为平面 $ADEF \perp$ 平面 $ABCD$，

且平面 $ADEF \cap$ 平面 $ABCD = AD$， $AF \subset$ 平面 $ADEF$，

所以 $AF \perp$ 平面 $ABCD$．

又 $CD \subset$ 平面 $ABCD$，所以 $AF \perp CD$．　　…………………………. 4 分

（Ⅱ）延长 AM 交 BC 于点 G，



因为 $AD // BC$， M 为 BD 中点，

所以 $\Delta BGM \cong \Delta DAM$，

所以 $BG = AD = 1$．

因为 $BC = 2$，所以 $GC = 1$．

由已知 $FE = AD = 1$，且 $FE // AD$，

又因为 $AD // GC$，所以 $FE // GC$，且 $FE = GC$，

所以四边形 $GCEF$ 为平行四边形，所以 $CE // GF$．

因为 $CE \not\subset$ 平面 AMF， $GF \subset$ 平面 AMF，

所以 $CE //$ 平面 AMF．　　…………………………. 9 分

（Ⅲ）设 G 为 BC 中点，连接 DG， EG．

由已知 $DG // AB$，所以 $DG //$ 平面 AFB．

又因为 $DE // AF$，所以 $DE //$ 平面 AFB，

所以平面 $DEG //$ 平面 AFB．

因为 $AD \perp AB$， $AD \perp AF$，所以 $AD \perp$ 平面 ABF，

所以多面体 $AFB-DEG$ 为直三棱柱．

因为 $AB = AF = AD = 1$，且 $\angle BAF = 90°$，

所以 $V_1 = V_{三棱柱AFB-DEG} = S_{\Delta AFB} \cdot AD = \frac{1}{2} \times 1 \times 1 \times 1 = \frac{1}{2}$．

由已知 $DG // AB$，且 $DG = AB$，

所以 $DG \perp GC$，且 $DG = GC = 1$.

又因为 $DE // AF$， $AF \perp$ 平面 CDG，

所以 $DE \perp$ 平面 CDG.

因为 $DE = AF = 1$，

所以 $V_2 = V_{三棱锥E-CDG} = \frac{1}{3}S_{\Delta CDG} \cdot DE = \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} \times 1 \times 1 \times 1 = \frac{1}{6}$，

所以 $V_{多面体ABCDEF} = V_1 + V_2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{6} = \frac{2}{3}$. ………………………. 14 分

19. （本小题满分 13 分）

解：（Ⅰ）求导得 $f'(x) = ae^x - 4$. 定义域 $x \in \mathbf{R}$.

当 $a \le 0$ 时， $f'(x) < 0$，函数 $f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上为减函数.

当 $a > 0$ 时，令 $f'(x) > 0$ 得 $x > \ln\frac{4}{a}$， $f(x)$ 为增函数；

令 $f'(x) < 0$ 得 $x < \ln\frac{4}{a}$， $f(x)$ 为减函数.

所以 $a \le 0$ 时，函数 $f(x)$ 减区间是 $(-\infty, +\infty)$.

当 $a > 0$ 时，函数 $f(x)$ 增区间是 $(\ln\frac{4}{a}, +\infty)$；减区间是 $(-\infty, \ln\frac{4}{a})$. ………5 分

（Ⅱ）依题意，只需证 $e^x - 4x + x^2 + 1 > 0$. 设 $F(x) = e^x - 4x + x^2 + 1$.

则 $F'(x) = e^x - 4 + 2x$，设 $G(x) = F'(x)$.

因为 $G'(x) = e^x + 2 > 0$，所以 $G(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上单调递增.

又因为 $G(0) = -3 < 0, G(1) = e - 2 > 0$，所以 $G(x) = 0$ 在 $(0,1)$ 内有唯一解，记为 x_0 即 $e^{x_0} = 4 - 2x_0$.

当 $x < x_0$ 时， $F'(x) < 0$， $F(x)$ 单调递减；当 $x > x_0$ 时， $F'(x) > 0$， $F(x)$ 单调递增；

所以 $F(x)_{\min} = F(x_0) = e^{x_0} - 4x_0 + x_0^2 + 1 = x_0^2 - 6x_0 + 5, x_0 \in (0,1)$.

设 $g(x) = x^2 - 6x + 5 = (x-3)^2 - 4$， $x \in (0,1)$. 则 $g(x) > g(1) = 0$. 所以 $F(x_0) > 0$.

所以 $F(x) > 0$，即曲线 $y = f(x)$ 在抛物线 $y = -x^2 - 1$ 上方. ………13 分

20. （本小题满分 14 分）

（Ⅰ）由题意 $a = \sqrt{2}$， $b = 1$， $c = \sqrt{a^2 - b^2} = 1$

所以离心率 $e=\dfrac{c}{a}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，左焦点 $F(-1,0)$． …………4 分

（Ⅱ）由题知，$\dfrac{x_0^2}{2}+y_0^2=1$，即 $x_0^2+2y_0^2=2$.

当 $y_0=0$ 时直线 l 方程为 $x=\sqrt{2}$ 或 $x=-\sqrt{2}$，直线 l 与椭圆 C 相切.

当 $y_0\neq 0$ 时，由 $\begin{cases}\dfrac{x^2}{2}+y^2=1,\\ x_0x+2y_0y=2\end{cases}$ 得 $(2y_0^2+x_0^2)x^2-4x_0x+4-4y_0^2=0$，

即 $x^2-2x_0x+2-2y_0^2=0$

所以 $\Delta=(-2x_0)^2-4(2-2y_0^2)=4x_0^2+8y_0^2-8=0$

故直线 l 与椭圆 C 相切. …………8 分

（Ⅲ）设 $A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，

当 $y_0=0$ 时，$x_1=x_2$，$y_1=-y_2$，$x_1=\pm\sqrt{2}$，

$\overrightarrow{FA}\cdot\overrightarrow{FB}=(x_1+1)^2-y_1^2=(x_1+1)^2-6+(x_1-1)^2=2x_1^2-4=0$，

所以 $\overrightarrow{FA}\perp\overrightarrow{FB}$，即 $\angle AFB=90^\circ$.

当 $y_0\neq 0$ 时，由 $\begin{cases}(x-1)^2+y^2=6,\\ x_0x+2y_0y=2\end{cases}$ 得 $(y_0^2+1)x^2-2(2y_0^2+x_0)x+2-10y_0^2=0$，

则 $x_1+x_2=\dfrac{2(2y_0^2+x_0)}{1+y_0^2}$，$x_1x_2=\dfrac{2-10y_0^2}{1+y_0^2}$，

$$y_1y_2=\frac{x_0^2}{4y_0^2}x_1x_2-\frac{x_0}{2y_0^2}(x_1+x_2)+\frac{1}{y_0^2}=\frac{-5x_0^2-4x_0+4}{2+2y_0^2}.$$

因为 $\overrightarrow{FA}\cdot\overrightarrow{FB}=(x_1+1,y_1)\cdot(x_2+1,y_2)$

$$=x_1x_2+x_1+x_2+1+y_1y_2$$

$$=\frac{4-20y_0^2+8y_0^2+4x_0+2+2y_0^2}{2+2y_0^2}+\frac{-5x_0^2-4x_0+4}{2+2y_0^2}$$

$$=\frac{-5(x_0^2+2y_0^2)+10}{2+2y_0^2}=0.$$

所以 $\overrightarrow{FA}\perp\overrightarrow{FB}$，即 $\angle AFB=90^\circ$.

故 $\angle AFB$ 为定值 90°. …………14 分