2024 北京昌平初三（上）期末

数　　学

2024.1

本试卷共 8 页，共三部分，28 个小题，满分 100 分．考试时间 120 分钟．考生务必将答案填涂或书写在答题卡上，在试卷上作答无效．考试结束后，请交回答题卡．

一、选择题（共 8 道小题，每小题 2 分，共 16 分）

第 1-8 题均有四个选项，符合题意的选项只有一个

1．如图，这是一张海上日出照片，如果把太阳看作一个圆，把海平面看作一条直线，那么这个圆与这条直线的位置关系是（　）

A．相离　　B．相切　　C．相交　　D．不确定

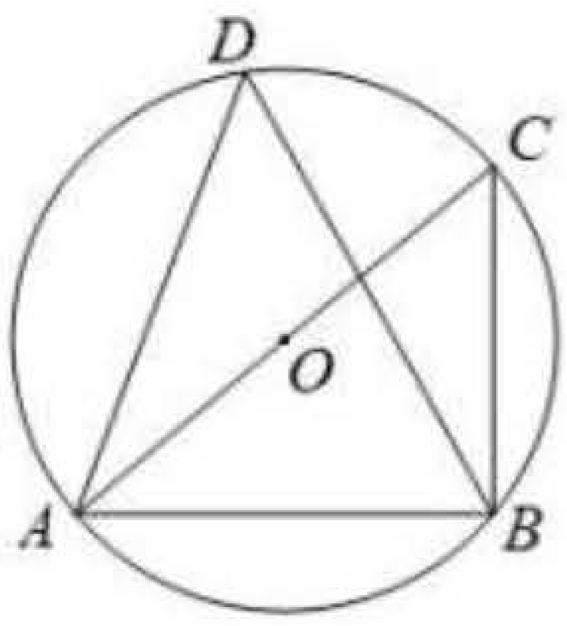
2．如果 $2m=3n(n\neq 0)$，那么下列比例式成立的是（　）

A．$\frac{m}{2}=\frac{n}{3}$　　B．$\frac{m}{3}=\frac{n}{2}$　　C．$\frac{m}{n}=\frac{2}{3}$　　D．$\frac{m}{2}=\frac{3}{n}$

3．将抛物线 $y=2x^2$ 向左平移 2 个单位长度，再向下平移 3 个单位长度，所得到的抛物线的表达式为（　）

A．$y=2(x+2)^2+3$　　B．$y=2(x-2)^2+3$　　C．$y=2(x-2)^2-3$　　D．$y=2(x+2)^2-3$

4．如图，点 A，B，C，D 在 $\odot O$ 上，AC 是 $\odot O$ 的直径，$\angle BAC=40°$，则 $\angle D$ 的度数是（　）

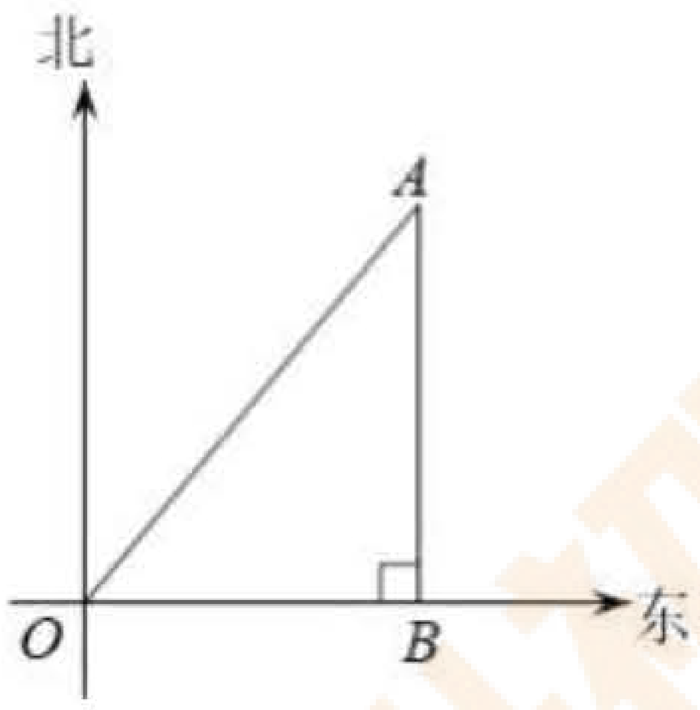


A．40°　　B．50°　　C．60°　　D．90°

5．在平面直角坐标系 xOy 中，若点 $A(x_1,1)$ 和 $B(x_2,4)$ 在反比例函数 $y=\frac{4}{x}$ 图象上，则下列关系式正确的是（　）

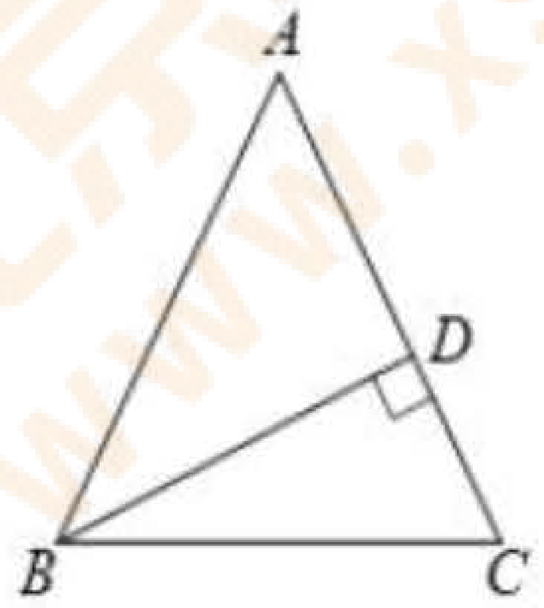
A．$0<x_2<x_1$　　B．$0<x_1<x_2$　　C．$x_1<x_2<0$　　D．$x_2<x_1<0$

6．如图，一艘轮船航行至 O 点时，测得某灯塔 A 位于它的北偏东 40°方向，且它与灯塔 A 相距 13 海里，继续沿正东方向航行，航行至点 B 处时，测得灯塔 A 恰好在它的正北方向，则 AB 的距离可表示为（　）



A．$13\cos 40^\circ$ 海里　　B．$13\sin 40^\circ$ 海里　　C．$\dfrac{13}{\sin 50^\circ}$ 海里　　D．$\dfrac{13}{\cos 50^\circ}$ 海里

7．如图，在等腰$\triangle ABC$中，$AB=AC$，$BD\perp AC$于点D，$\cos A=\dfrac{3}{5}$，则$\sin\angle CBD$的值（　）

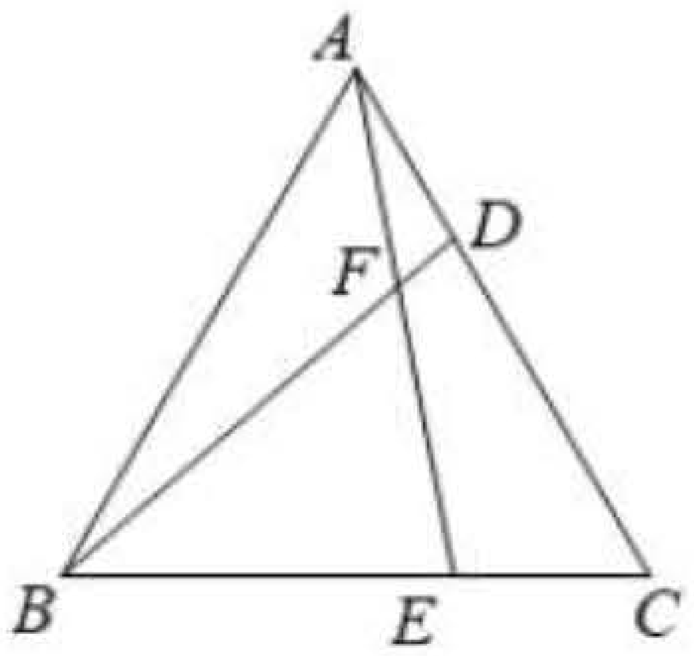


A．$\dfrac{1}{2}$　　B．2　　C．$\dfrac{\sqrt{5}}{2}$　　D．$\dfrac{\sqrt{5}}{5}$

8．如图，$\triangle ABC$是等边三角形，D，E分别是AC，BC边上的点，且$AD=CE$，连接BD，AE相交于点F，则下列说法正确的是（　）

①$\triangle ABD\cong\triangle CAE$；　②$\angle BFE=60^\circ$；

③$\triangle AFB\backsim\triangle ADF$；　④若$\dfrac{AD}{AC}=\dfrac{1}{3}$，则$\dfrac{AF}{BF}=\dfrac{1}{2}$

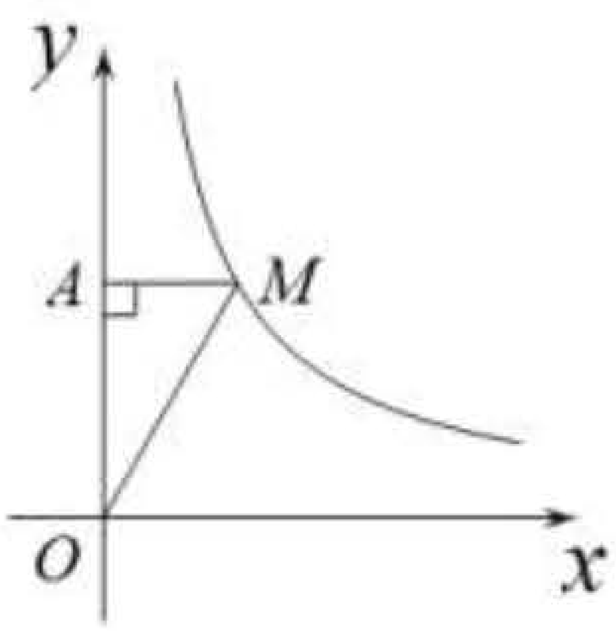


A．①②③　　B．①②④　　C．②③④　　D．①③④

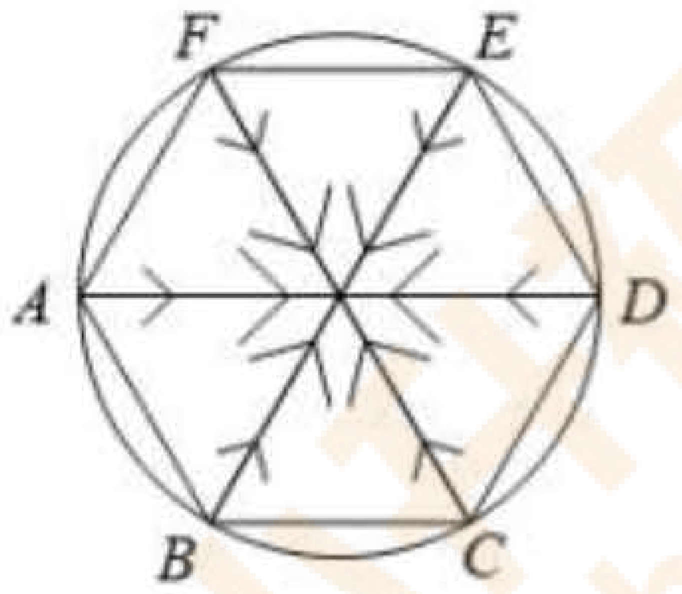
二、填空题（共 8 道小题，每小题 2 分，共 16 分）

9．写出一个开口向下且过$(0,1)$的抛物线的表达式______.

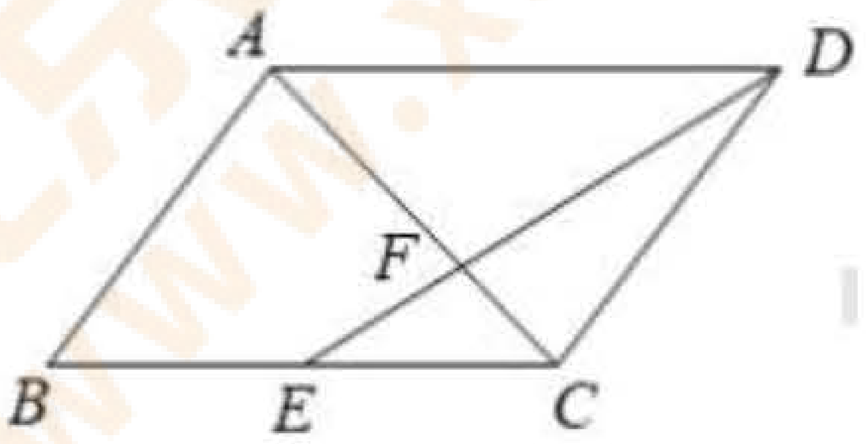
10．如图，M为反比例函数$y=\dfrac{k}{x}(k\neq 0)$的图象上的一点，$MA\perp y$轴，垂足为A，$\triangle AOM$的面积为3，则k的值为______.



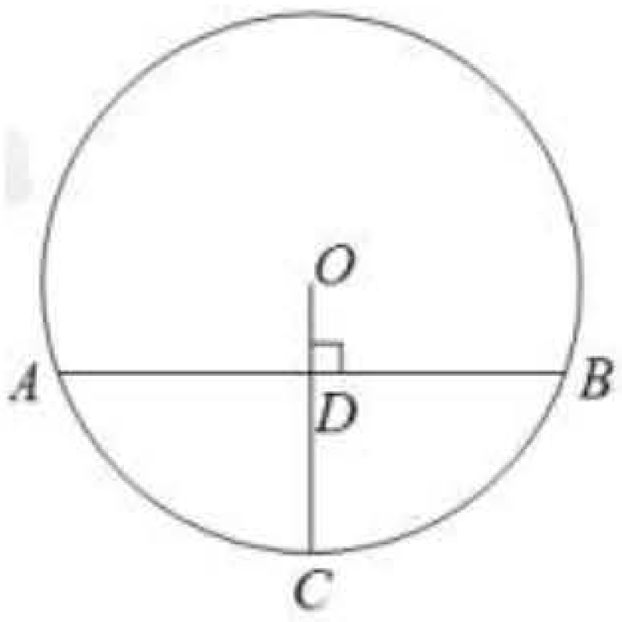
11．在 2022 年北京冬奥会开幕式和闭幕式中，一片“雪花”的故事展现了“世界大同，天下一家”的主题，让世界观众感受了中国人的浪漫．如图，作出“雪花”图案（正六边形 $ABCDEF$）的外接圆，已知正六边形 $ABCDEF$ 的边长是 4，则 BC 长为______．



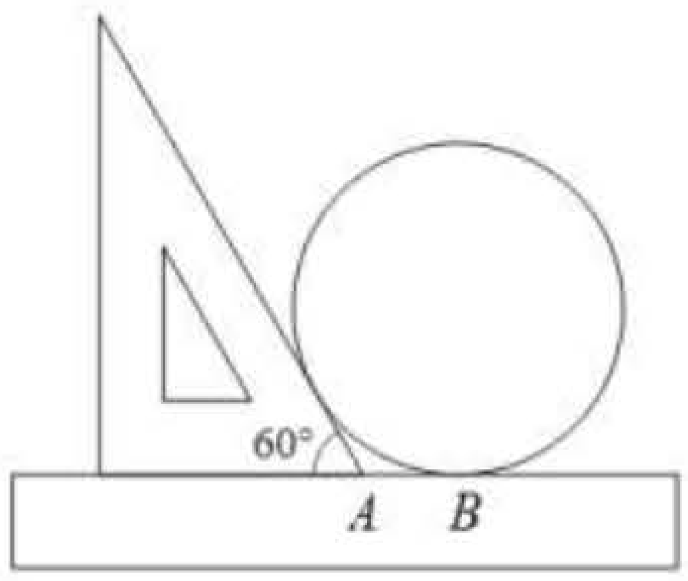
12．如图，在平行四边形 $ABCD$ 中，E 为 BC 的中点，DE，AC 交于点 F，则 $\triangle CEF$ 和 $\triangle ADF$ 的面积比为______．



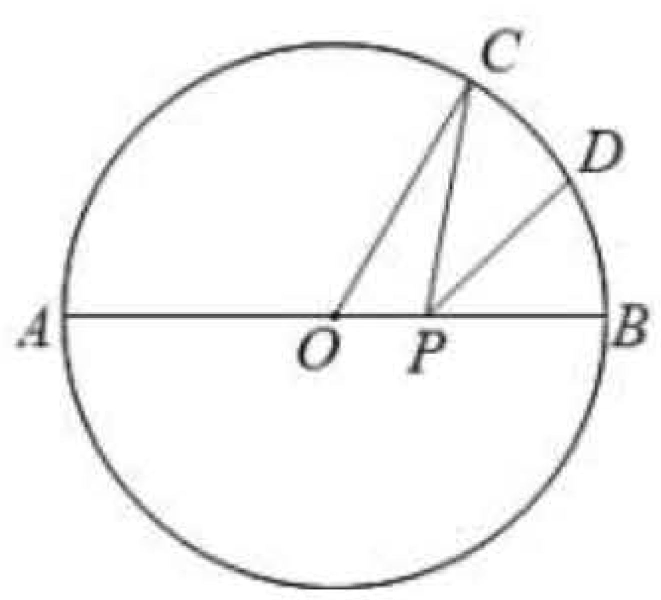
13．如图，在 $\odot O$ 中，半径 OC 垂直弦 AB 于点 D，若 $OC=3$， $AB=4\sqrt{2}$，则 CD 的长为______．



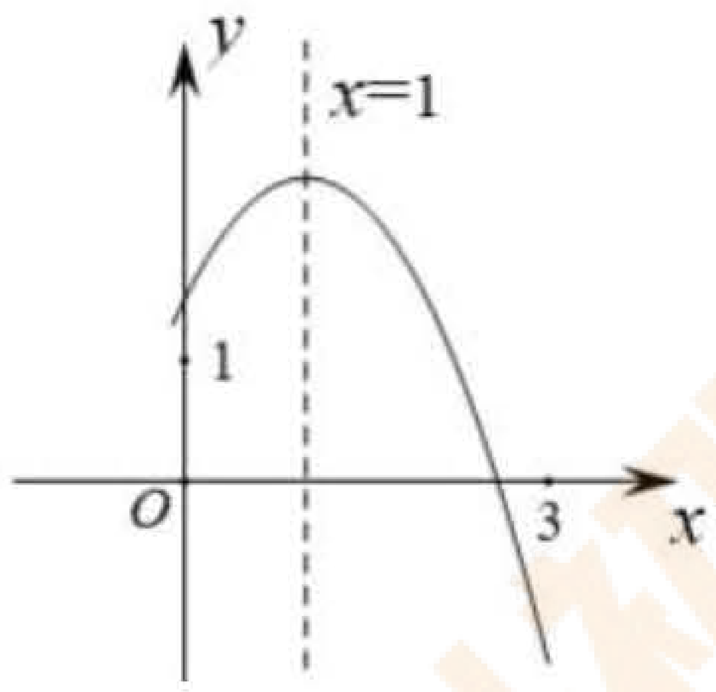
14．小明同学测量一个圆形零件的半径时，他将直尺、三角板和这个零件如图放置于桌面上，零件与直尺，三角板均相切，测得点 A 与其中一个切点 B 的距离为 3cm，则这个零件的半径是______cm．



15．如图，AB 是 $\odot O$ 直径，点 C 是 $\odot O$ 上一点，$OC=1$ 且 $\angle BOC=60°$，点 D 是 BC 的中点，点 P 是直径 AB 上一动点，则 $CP+DP$ 的最小值为______．



16．已知抛物线 $y=ax^2+bx+c$（a，b，c 为常数，$a\neq 0$）的对称轴是直线 $x=1$，其部分图象如图，则以下四个结论中：① $abc>0$；② $2a+b=0$；③ $3a+c<0$；④ $4a+b^2>4ac$．其中，正确结论的序号是______．



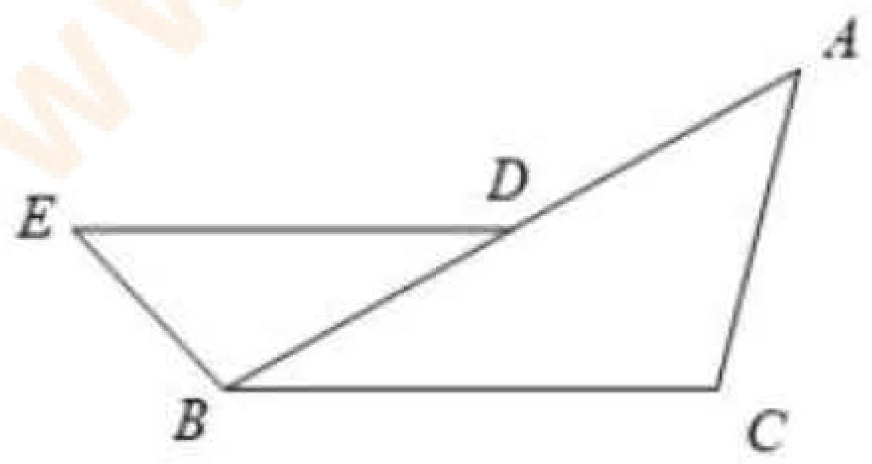
三、解答题（本题共 12 道小题，第 17 题 5 分，第 18 题 4 分，第 19 题 6 分，第 20-22 题，每小题 5 分，第 23-26 题，每小题 6 分，第 27、28 题，每小题 7 分，共 68 分）

17．计算：$\sin 30^\circ \cdot \tan 45^\circ + \sqrt{3}\tan 30^\circ - \cos^2 45^\circ$.

18．如图，$\triangle ABC$ 中，点 D 是边 AB 上一点，点 E 为 $\triangle ABC$ 外一点，$DE \,/\!/\, BC$ ，连接 BE.

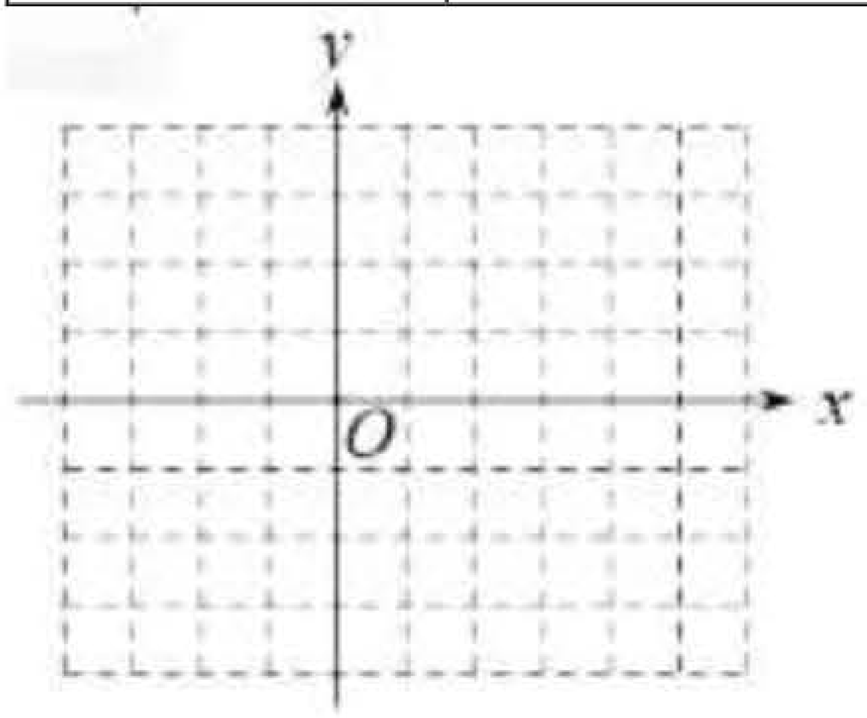
从下列条件中：① $\angle E = \angle A$；② $\dfrac{DE}{BA} = \dfrac{DB}{BC}$.

选择一个作为添加的条件，求证：$\triangle EDB \backsim \triangle ABC$.



19．已知二次函数 $y = ax^2 + bx + c\left(a \neq 0\right)$ 的 y 与 x 的部分对应值如下表：

x	…	-3	-1	1	3	…
y	…	-3	0	1	0	…

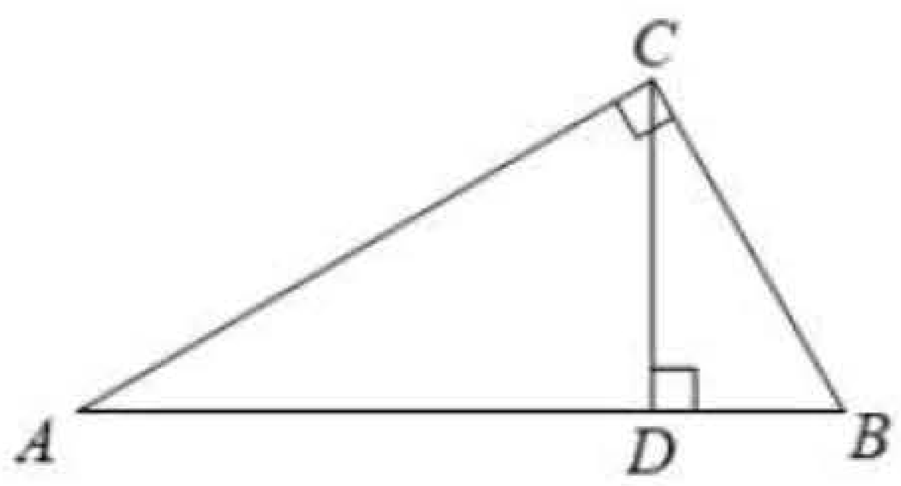


（1）求这个二次函数表达式；

（2）在平面直角坐标系中画出这个函数图象；

（3）当 x 的取值范围为______时，$y > -3$.

20．如图，在 $\triangle ABC$ 中，$\angle ACB = 90^\circ$，$CD \perp AB$ 于点 D，$CD = \sqrt{3}$，$BD = 1$，求 $\sin \angle BCD$ 及 AC 的长.



21．已知：如图，在 $\triangle ABC$ 中，$AB = AC$.

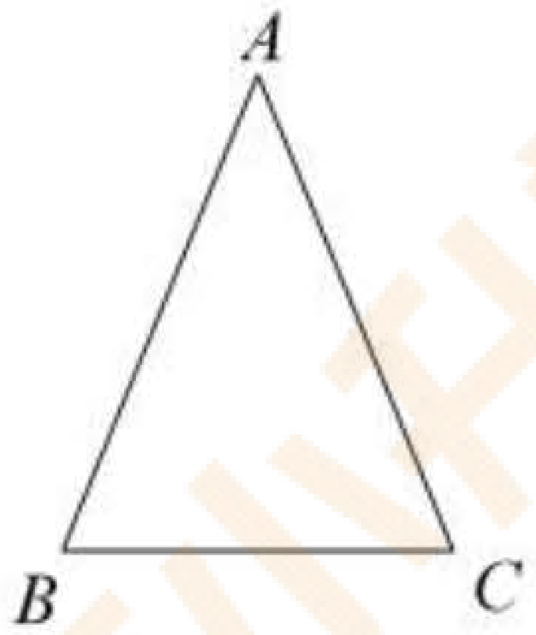
求作：射线 BP，使得 $\angle ABP = \dfrac{1}{2}\angle BAC$.

作法：①以点 A 为圆心，AB 长为半径画圆；

②延长 BA 交⊙A 于点 D，以点 D 为圆心，BC 长为半径画弧，与⊙A 交于点 P（点 C，P 在线段 BD 的同侧）；

③作射线 BP.

射线 BP 即为所求.



（1）使用直尺和圆规，依作法补全图形（保留作图痕迹）；

（2）完成下面的证明

证明：连接 AP，DP.

$\because AB = AC$，

$\therefore$ 点 C 在⊙A 上.

$\because DP = DP$，

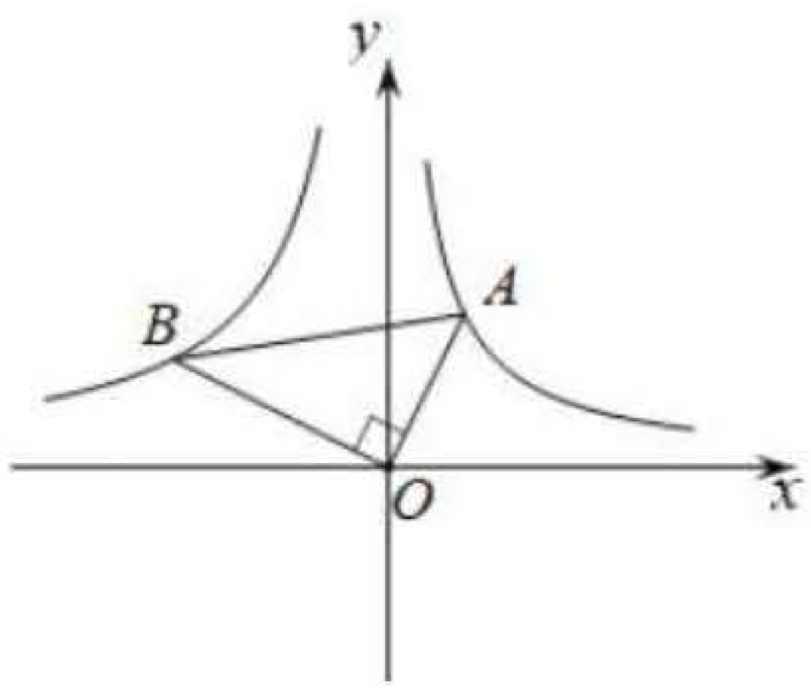
$\therefore \angle ABP = \frac{1}{2}\angle DAP$（____________）（填推理依据）.

$\because DP = BC$，

$\therefore \angle DAP =$ ______.

$\therefore \angle ABP = \frac{1}{2}\angle BAC$.

22．如图，在平面直角坐标系 xOy 中，点 $A(1,2)$ 在双曲线 $y_1 = \frac{k_1}{x}(k_1 \neq 0)$ 上，点 B 在双曲线 $y_2 = \frac{k_2}{x}(k_2 \neq 0)$ 上，且满足 $OA \perp OB$，连接 AB.

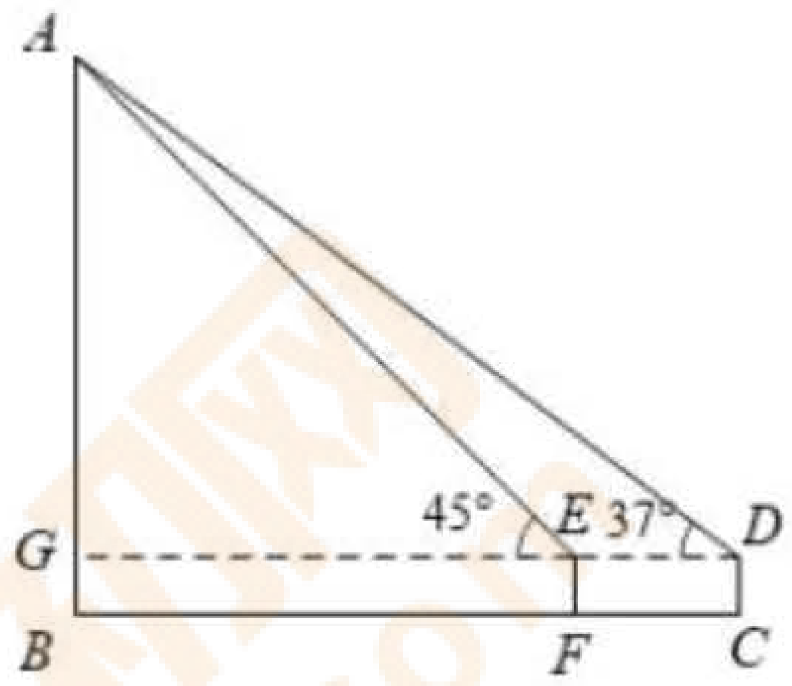


（1）求双曲线 $y_1 = \frac{k_1}{x}(k_1 \neq 0)$ 的表达式；

（2）若 $\tan\angle OAB = \sqrt{2}$，求 k_2 的值.

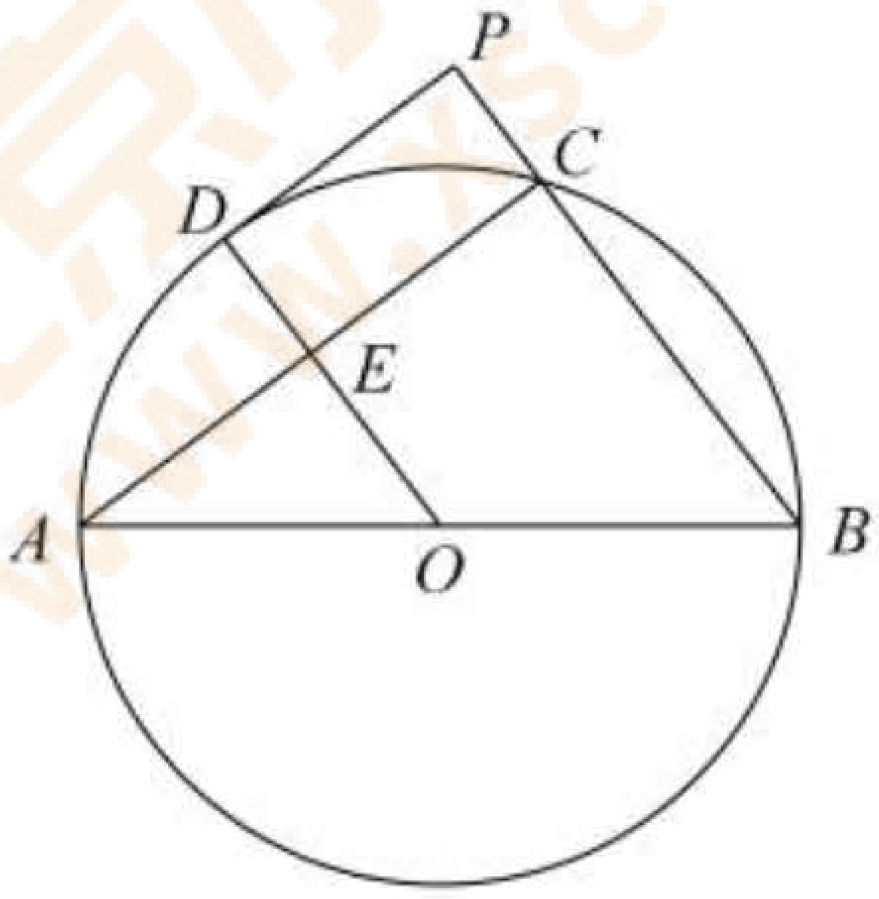
23．某校组织九年级学生参加社会实践活动，数学学科的项目任务是测量银山塔林中某塔的高度 AB，其中一个数学兴趣小组设计的方案如图所示，他们在点 C 处用高 1.5m 的测角仪 CD 测得塔顶 A 的仰角为 37°，然后沿 CB 方向前行 7m 到达点 F 处，在 F 处测得塔顶 A 的仰角为 45°．请根据他们的测量数据求塔高 AB 的长度大约是多少.（参考数据：$\sin 37° \approx \frac{3}{5}$，$\cos 37° \approx \frac{4}{5}$，$\tan 37° \approx \frac{3}{4}$，$\sin 53° \approx \frac{4}{5}$，$\cos 53° \approx \frac{3}{5}$，$\tan 53° \approx \frac{4}{3}$.）

23 题图 1



23 题图 2

24．如图，AB 是⊙O 的直径，点 C 在⊙O 上，点 D 为 $\overset{\frown}{AC}$ 的中点，过点 D 作⊙O 的切线，交 BC 延长线于点 P，连接 OD 交 AC 于点 E．

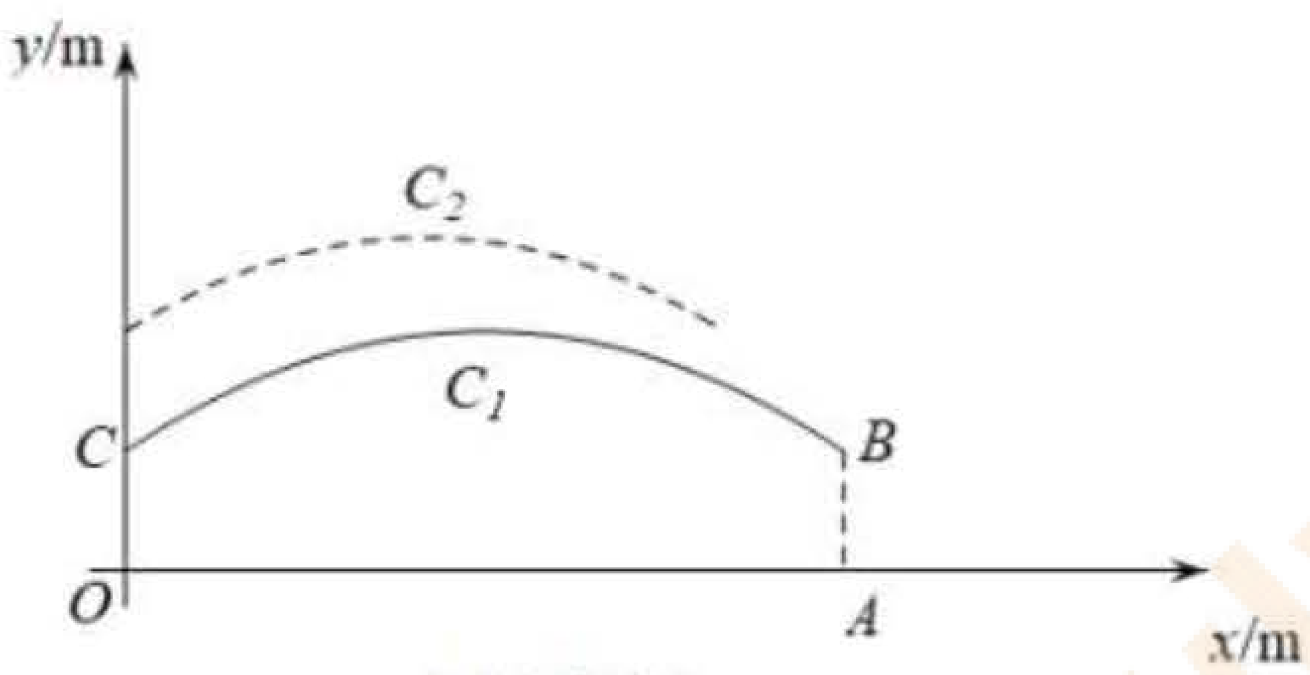


（1）求证：四边形 $DECP$ 是矩形；

（2）作射线 AD 交 BC 的延长线于点 F，若 $\tan\angle CAB=\dfrac{3}{4}$，$BC=6$，求 DF 的长．

25．如图，小静和小林在玩沙包游戏，沙包（看成点）抛出后，在空中的运动轨迹可看作抛物线的一部分，小静和小林分别站在点 O 和点 A 处，测得 OA 距离为 6m，若以点 O 为原点，OA 所在直线为 x 轴，建立如图所示的平面直角坐标系，小林在距离地面 1m 的 B 处将沙包抛出，其运动轨迹为抛物线 C_1：$y=a(x-3)^2+2$ 的一部分，小静恰在点 $C(0,c)$ 处接住，然后跳起将沙包回传，其运动轨迹为抛物线 C_2：$y=-\dfrac{1}{8}x^2+\dfrac{n}{8}x+c+1$ 的一部分．

25 题图 1



25 题图 2

（1）抛物线 C_1 的最高点坐标为______；

（2）求 a，c 的值；

（3）小林在 x 轴上方 1m 的高度上，且到点 A 水平距离不超过 1m 的范围内可以接到沙包，若小林成功接到小静的回传沙包，则 n 的整数值可为______．

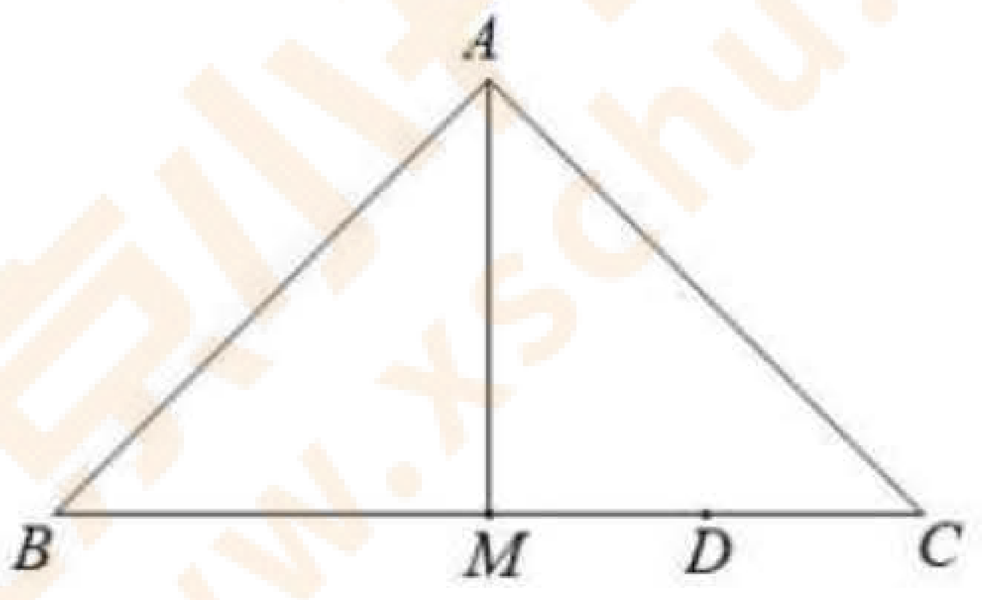
26．在平面直角坐标系 xOy 中，点 $(0,3)$，$(6,y_1)$ 在抛物线 $y=ax^2+bx+c(a\neq 0)$ 上．

（1）当 $y_1=3$ 时，求抛物线的对称轴；

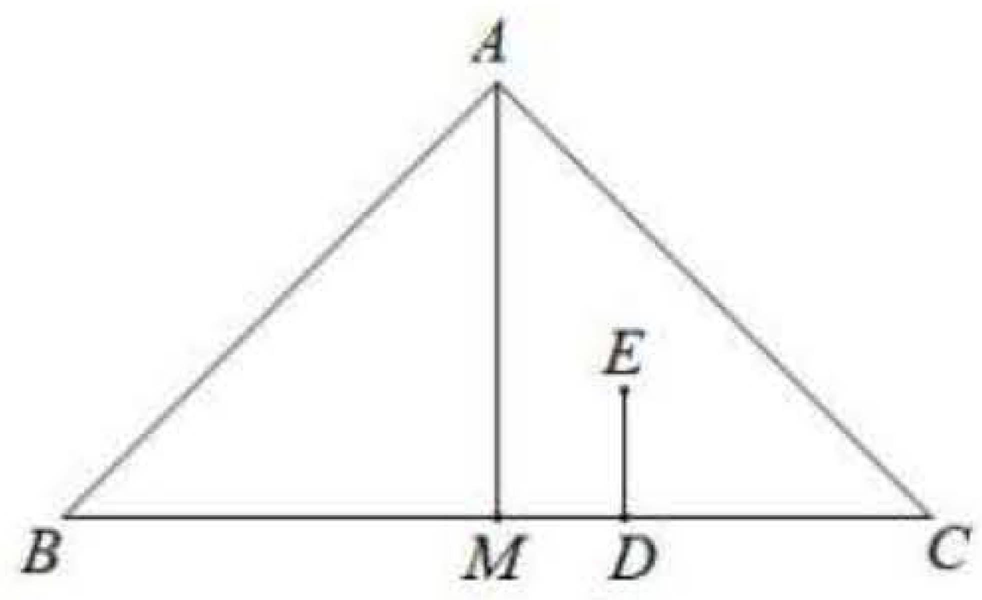
（2）若抛物线 $y=ax^2+bx+c\left(a\neq 0\right)$ 经过点 $\left(-1,-1\right)$，当自变量 x 的值满足 $-1\leq x\leq 2$ 时，y 随 x 的增大而增大，求 a 的取值范围；

（3）当 $a>0$ 时，点 $\left(m-4,y_2\right)$，$\left(m,y_2\right)$ 在抛物线 $y=ax^2+bx+c$ 上．若 $y_2<y_1<c$，请直接写出 m 的取值范围．

27．在 $\triangle ABC$ 中，$AB=AC$，$\angle BAC=90°$，点 M 为 BC 的中点，连接 AM，点 D 为线段 CM 上一动点，过点 D 作 $DE\perp BC$，且 $DE=DM$，（点 E 在 BC 的上方），连接 AE，过点 E 作 AE 的垂线交 BC 边于点 F．



27 题图 1



27 题图 2

（1）如图 1，当点 D 为 CM 的中点时，

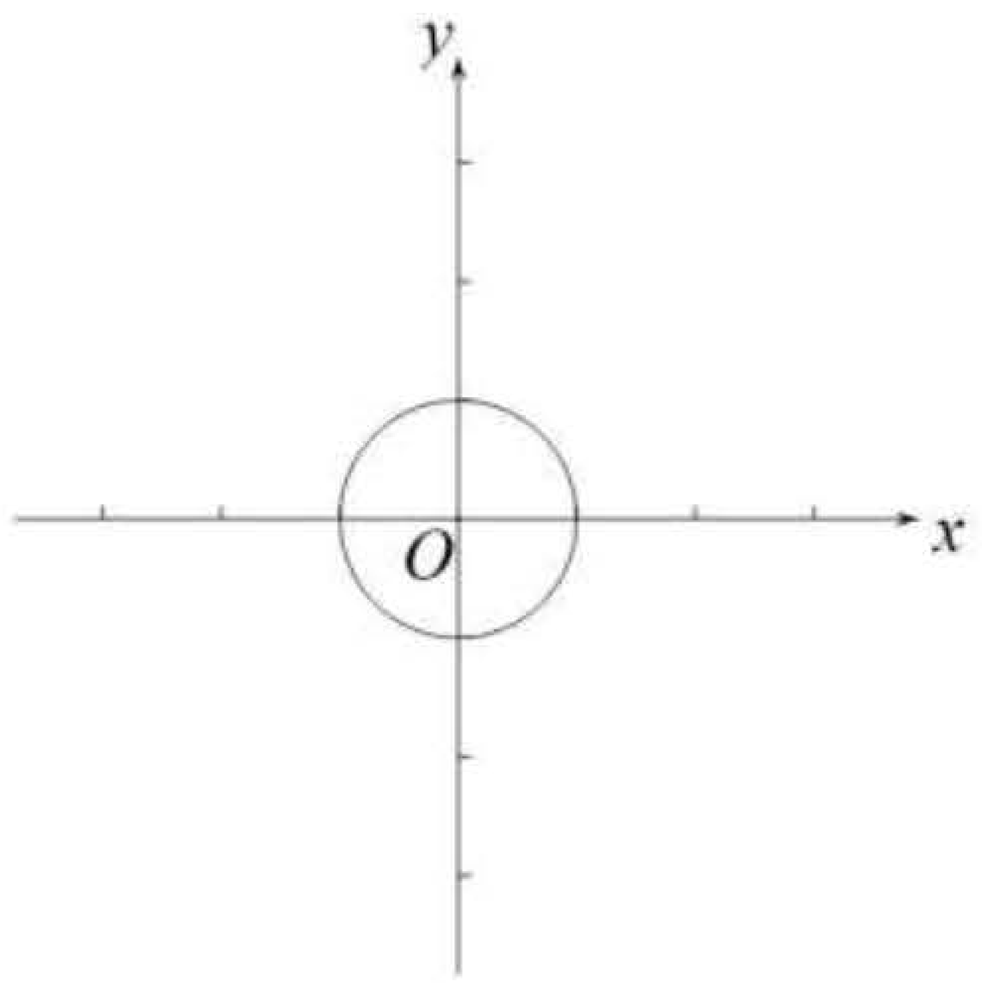
①依题意补全图形；

②直接写出 BF 和 DE 的数量关系为______；

（2）当点 D 在图 2 的位置时，用等式表示线段 BF 与 DE 之间的数量关系，并证明．

28．对于在平面直角坐标系 xOy 中 $\odot T$ 和 $\odot T$ 外的点 P，给出如下定义：已知 $\odot T$ 的半径为 1，若 $\odot T$ 上存在点 Q，满足 $PQ\leq 2$，则称点 P 为 $\odot T$ 的关联点．

（1）如图 1，若点 T 的坐标为 $\left(0,0\right)$，

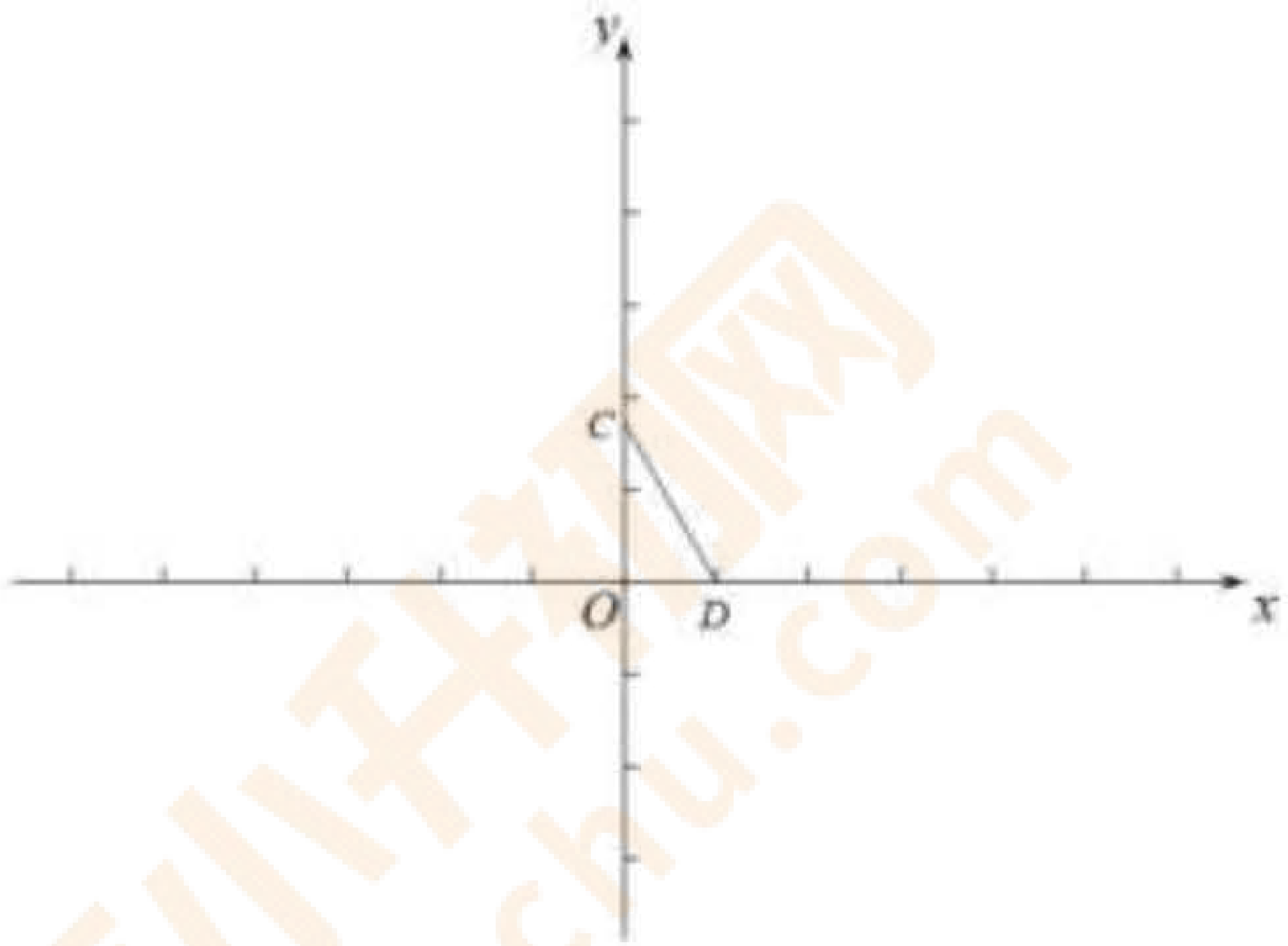


28 题图 1

①在点 $P_1\left(3,0\right)$，$P_2\left(3,-2\right)$，$P_3\left(-2,2\right)$ 中，是 $\odot T$ 的关联点的是______；

②直线 $y=2x+b$ 分别交 x 轴，y 轴于点 A，B，若线段 AB 存在 $\odot T$ 的关联点，求 b 的取值范围；

（2）已知点 $C\left(0,\sqrt{3}\right)$，$D\left(1,0\right)$，$T\left(m,1\right)$，$\triangle COD$ 上的每一个点都是 $\odot T$ 的关联点，直接写出 m 的取值范围．



28 题图 2

参考答案

一、选择题（本题共 8 道小题，每小题 2 分，共 16 分）

题号	1	2	3	4	5	6	7	8
答案	C	B	D	B	A	A	D	B

二、填空题（本题共 8 道小题，每小题 2 分，共 16 分）

题号	9	10	11	12	13	14	15	16
答案	答案不唯一 例如：$y=-2x^2+1$	6	$\frac{4}{3}\pi$	$1:4$	2	$3\sqrt{3}$	$\sqrt{2}$	②③④

三、解答题（本题共 12 道小题，第 17 题 5 分，第 18 题 4 分，第 19 题 6 分，第 20-22 题，每小题 5 分，第 23-26 题，每小题 6 分，第 27、28 题，每小题 7 分，共 68 分）

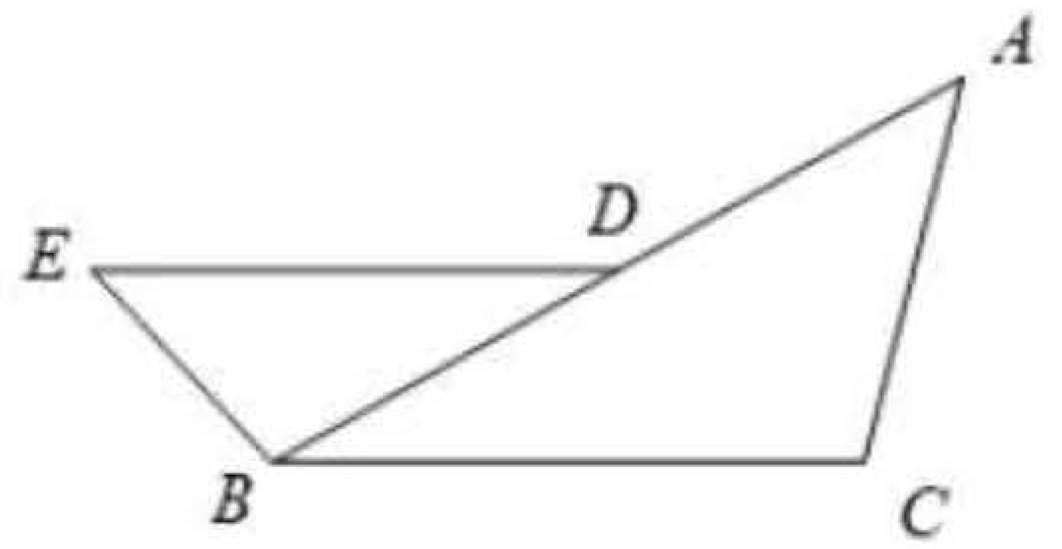
17．解：$=\frac{1}{2}\times1+\sqrt{3}\times\frac{\sqrt{3}}{3}-\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2=\frac{1}{2}+1-\frac{1}{2}=1$.

18．证明：选择①

$\because DE\parallel BC$，$\therefore\angle EDB=\angle ABC$，$\because\angle E=\angle A$，$\therefore\triangle EDB\backsim\triangle ABC$.

或选择②

$\because DE\parallel BC$，$\therefore\angle EDB=\angle ABC$，$\because\frac{DE}{BA}=\frac{DB}{BC}$，$\therefore\triangle EDB\backsim\triangle ABC$.



19．解：（1）设二次函数的表达式为 $y=a(x-1)^2+1$，

把 $(3,0)$ 代入上式得 $y=a(x-1)^2+1$，$\therefore a=-\frac{1}{4}$，$\therefore y=-\frac{1}{4}(x-1)^2+1$.

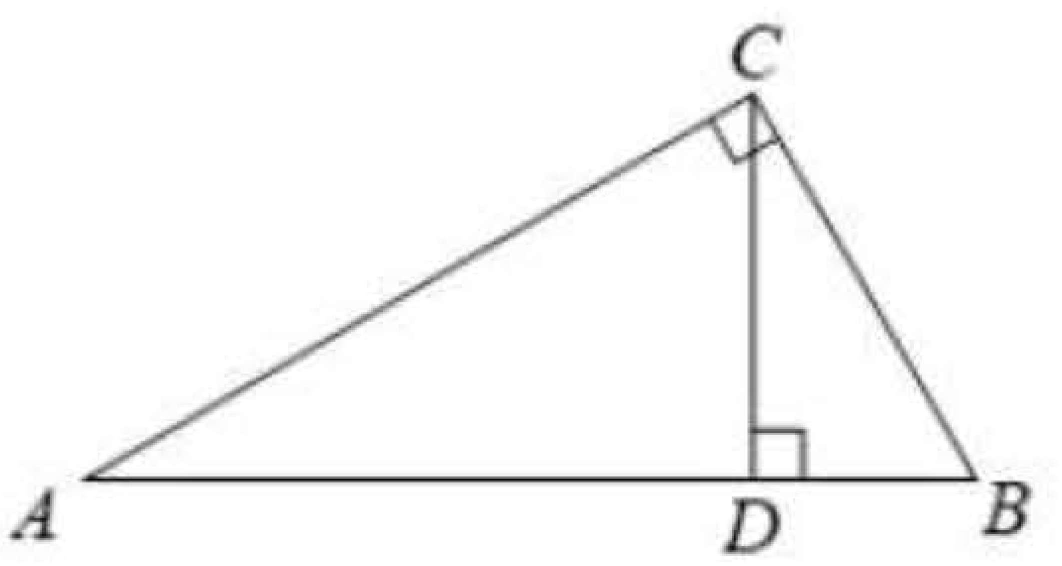
（2）画图略.

（3）当 $-3<x<5$ 时，$y>-3$.

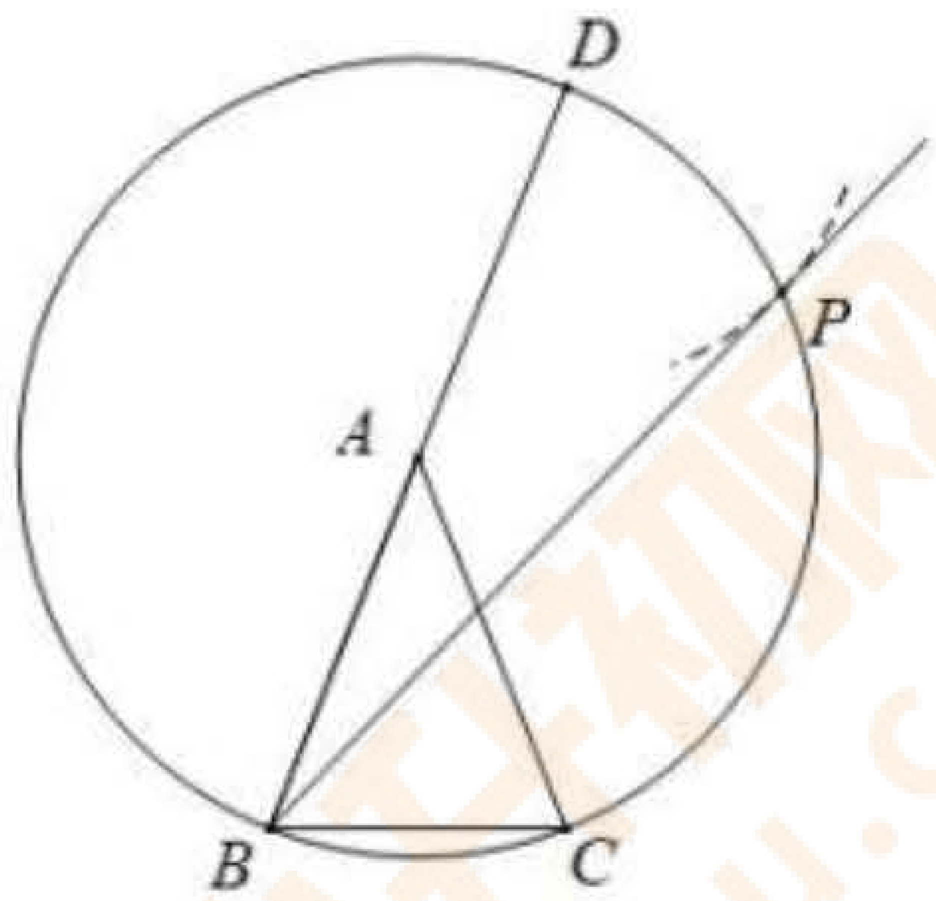
20．解：$\because CD\perp AB$，$\therefore\angle CDA=\angle CDB=90°$.

在 Rt$\triangle CDB$ 中，$BD=1$，$CD=\sqrt{3}$，$\therefore CB=2$，$\tan B=\sqrt{3}$.

$\therefore\sin\angle BCD=\frac{1}{2}$. 在 Rt$\triangle CDB$ 中，$BC=2$，$\tan B=\sqrt{3}$，$\therefore AC=2\sqrt{3}$.



21.（1）画图.



（2）一条弧所对的圆周角等于它所对的圆心角的一半.

$\angle DAP=\angle BAC$.

22．解：（1）$\because$ 点 $A\left(1,2\right)$ 在双曲线 $y_1=\dfrac{k_1}{x}\left(k_1\neq 0\right)$ 上，$\therefore k_1=2$，$\therefore y_1=\dfrac{2}{x}$.

（2）如图，分别过点 A，B 作 x 轴的垂线，垂足分别为 C，D.

$\therefore \angle AOC+\angle OAC=90^\circ$，$\angle BDO=\angle OCA=90^\circ$.

$\because OA\perp OB$，$\therefore \angle AOC+\angle BOD=90^\circ$.

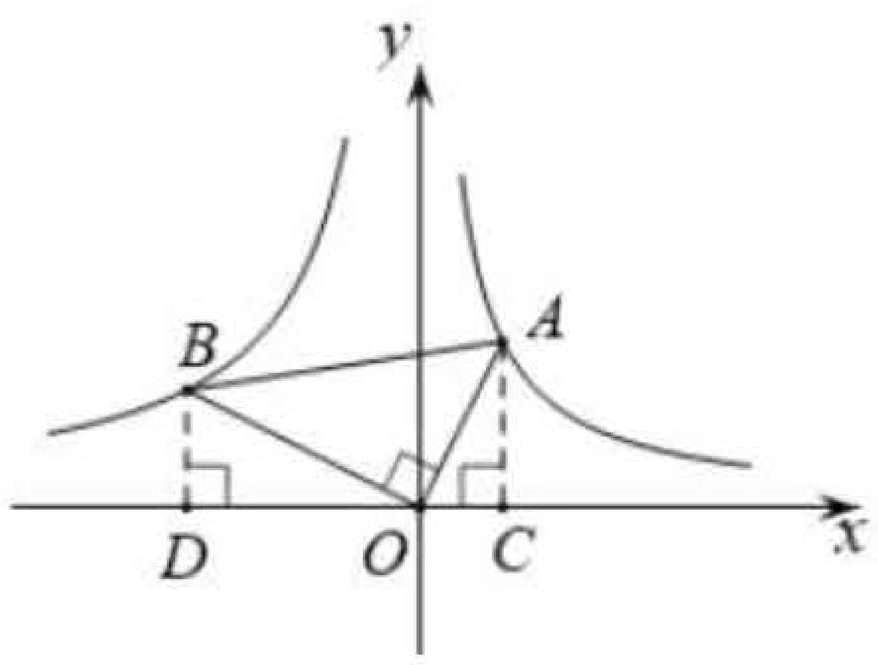
$\therefore \angle BOD=\angle OAC$. $\therefore \triangle BOD\backsim\triangle OAC$.

$\therefore \dfrac{BD}{OC}=\dfrac{OD}{AC}=\dfrac{OB}{AO}$. $\because A$ 的坐标为 $\left(1,2\right)$，$\therefore OC=1$，$AC=2$.

$\because$ Rt$\triangle AOB$ 中，$\tan\angle OAB=\dfrac{OB}{AO}=\sqrt{2}$，$\therefore \dfrac{BD}{1}=\dfrac{OD}{2}=\sqrt{2}$.

$\therefore BD=\sqrt{2}$，$OD=2\sqrt{2}$. $\therefore B$ 的坐标为 $\left(-2\sqrt{2},\sqrt{2}\right)$.

$\therefore$ 将 $B\left(-2\sqrt{2},\sqrt{2}\right)$ 代入 $y_2=\dfrac{k_2}{x}\left(k_2\neq 0\right)$ 得 $k_2=-4$.



23．解：根据题意，得 $AB\perp BC$，$EF\perp BC$，$DC\perp BC$，$DG\perp AB$.

$\therefore BG=CD=1.5\text{m}$，$DE=CF=7\text{m}$，$\angle AEG=45^\circ$，$\angle ADG=37^\circ$，

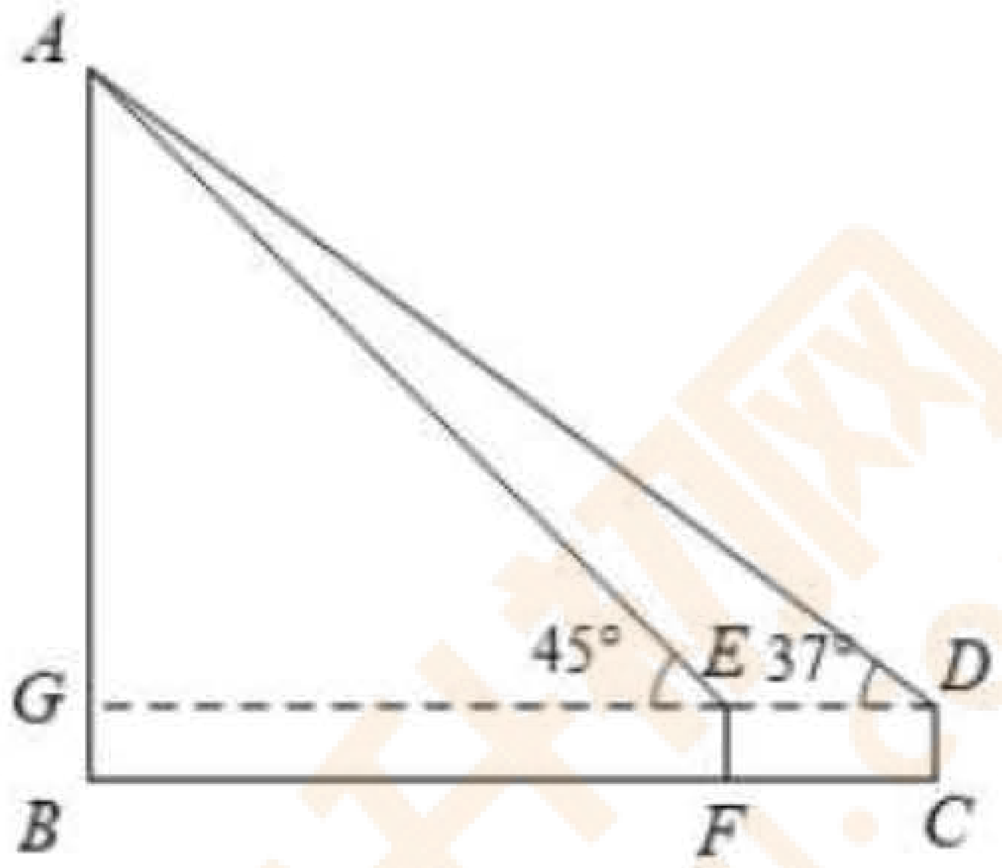
在 Rt$\triangle AGE$ 中，$\angle AEG=45^\circ$，$\therefore \angle GAE=45^\circ$，$\therefore AG=GE$.

设 AG 为 x m，则 $GE=x$，$GD=x+7$，

在 Rt$\triangle AGD$ 中，$\tan\angle ADG=\dfrac{AG}{GD}$，$\therefore 4AG\approx 3GD$，

$4x\approx 3\left(x+7\right)$，$x\approx 21$，$\therefore AB=AG+GB\approx 21+1.5\approx 22.5\text{m}$，

答：塔高 AB 的长约为 22.5m.



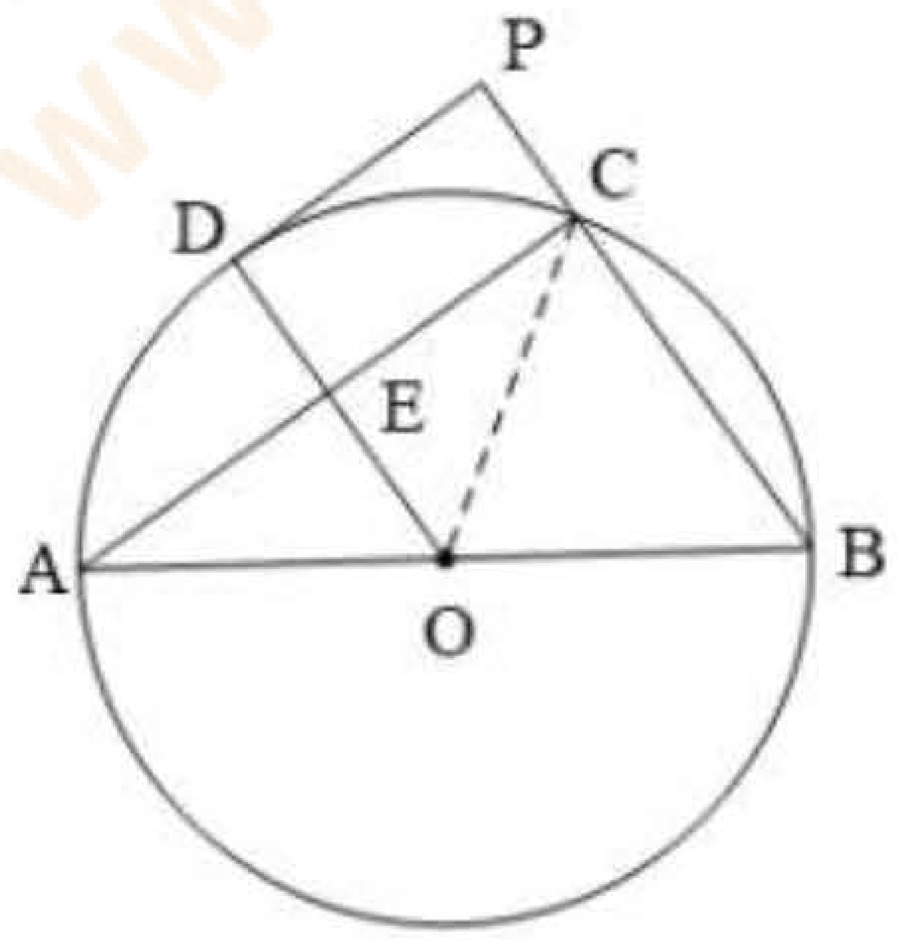
24．证明：（1）连接 OC

$\because AB$ 为 $\odot O$ 直径，C 为 $\odot O$ 上一点，$\therefore \angle ACB=90°$，$\therefore \angle ACP=90°$，

$\because$ 点 D 为 AC 的中点，$\therefore AD=DC$，$\therefore \angle AOD=\angle COD$，

$\because OA=OC$，$\therefore OD\perp AC$，$\because DP$ 是 $\odot O$ 的切线，D 为切点，

$\therefore OD\perp DP$，$\therefore$ 四边形 $DECP$ 是矩形．



（2）如图补全图形，在 $\mathrm{Rt}\triangle ABC$ 中，$BC=6$，$\tan\angle CAB=\dfrac{3}{4}$，

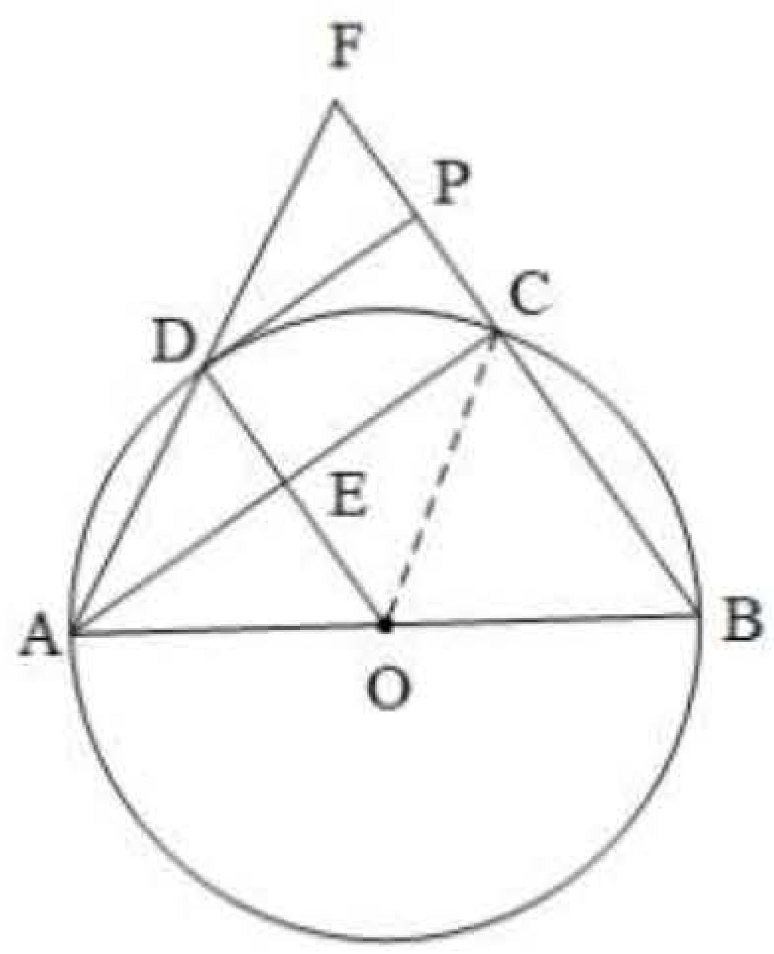
$\therefore AC=8$，$AB=10$，$\because OD\perp AC$，$\therefore AE=EC=4$，

在 $\mathrm{Rt}\triangle AEO$ 中，$OA=5$，$AE=4$，$\therefore OE=3$，$\therefore DE=2$，

在 $\mathrm{Rt}\triangle AEO$ 中，$DE=2$，$AE=4$，$\therefore AD=2\sqrt{5}$，

$\because$ 矩形 $DECP$ 对边平行，$\therefore OD\,//\,BF$，

$\therefore \dfrac{AO}{OB}=\dfrac{AD}{DF}=1$，$\therefore FD=2\sqrt{5}$．



25．解：（1）抛物线 C_1 的最高点坐标为 $(3,2)$．

（2）由题可得点 $A(6,1)$，将 $A(6,1)$ 代入抛物线 C_1：$y=a(x-3)^2+2$，

得 $a=-\frac{1}{9}$，∵对称轴为直线 $x=3$，∴点 A 和点 C 关于对称轴对称．

∴ $c=1$（也可让 $x=0$ 代入表达式求出 $c=1$）．

（3） $n=4$ 或 $n=5$．

26．解：（1）∵ $(0,3)$，$(6,3)$ 为抛物线上的对称点，∴ $x=\frac{x_1+x_2}{2}=\frac{0+6}{2}=3$．

（2）∵ $y=ax^2+bx+c(a\neq 0)$ 过 $(0,3)$，$(-1,-1)$，

∴ $c=3$，$a-b+3=-1$，$b=a+4$，∴对称轴 $x=-\frac{b}{2a}=-\frac{a+4}{2a}$．

①当 $a>0$ 时，∵ $-1\le x\le 2$ 时，y 随 x 的增大而增大，

∴ $-\frac{a+4}{2a}\le -1$，$a\le 4$，∴ $0<a\le 4$．

②当 $a<0$ 时，∵ $-1\le x\le 2$ 时，y 随 x 的增大而增大，

∴ $-\frac{a+4}{2a}\ge 2$，$a\ge -\frac{4}{5}$，∴ $-\frac{4}{5}\le a<0$，

综上：a 的取值范围是 $-\frac{4}{5}\le a<0$ 或 $0<a\le 4$．

（3） $5<m<6$ 或 $m>10$．

27.（1）①补图．

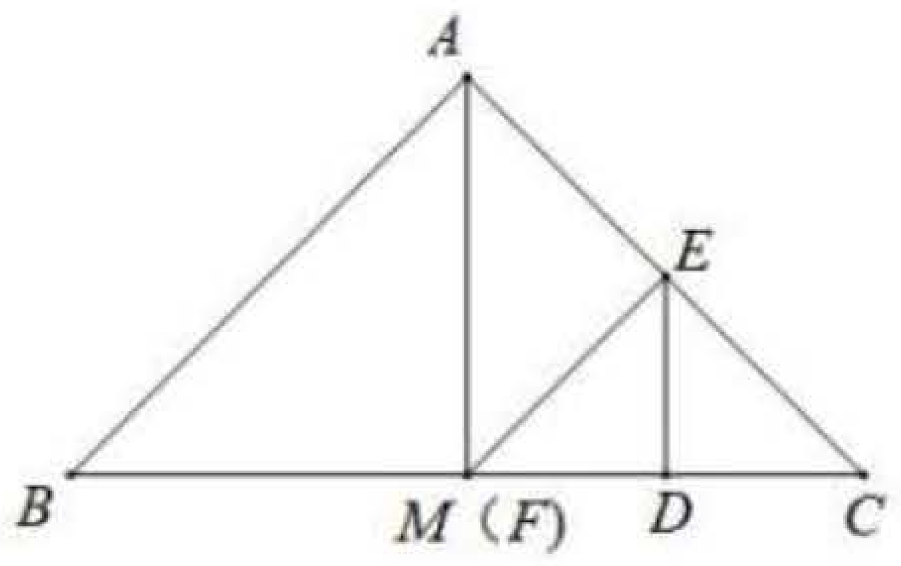


图1

② $BF=2DE$．

（2）当点 D 在图 2 位置时，仍满足 $BF=2DE$，

证明：如图，AM 与 EF 交于点 N，连接 EM，EC，

∵ $AB=AC$，$\angle BAC=90°$，M 为 BC 中点，

∴ $AM=BM=CM=\frac{1}{2}BC$，$\angle AMC=\angle AMB=90°$，

∵ $DE=DM$，$DE\perp BC$，∴ $\angle EMC=\angle AME=45°$，

∵ $EM=EM$，∴ $\triangle AME\cong\triangle CME$，∴ $\angle EAM=\angle ECM$，

∵在 $\triangle ANE$ 和 $\triangle FNM$ 中，$EF\perp AE$，$\angle AMB=90°$，$\angle ANE=\angle FNM$，

∴ $\angle NAE=\angle NFM$ （即 $\angle EFC$），∴ $\angle EFC=\angle ECM$，∴ $EF=EC$，

∵ $ED\perp FC$，∴ $CF=2DC$，∵ $BC=2CM$，∴ $BF=BC-CF=2(CM-DC)=2DM=2DE$．

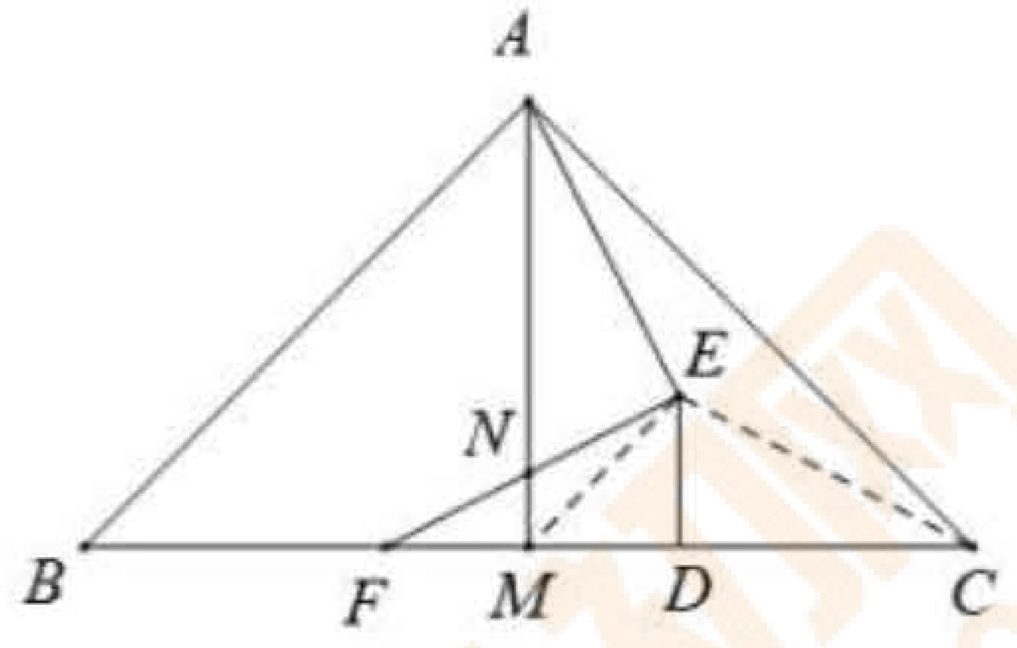
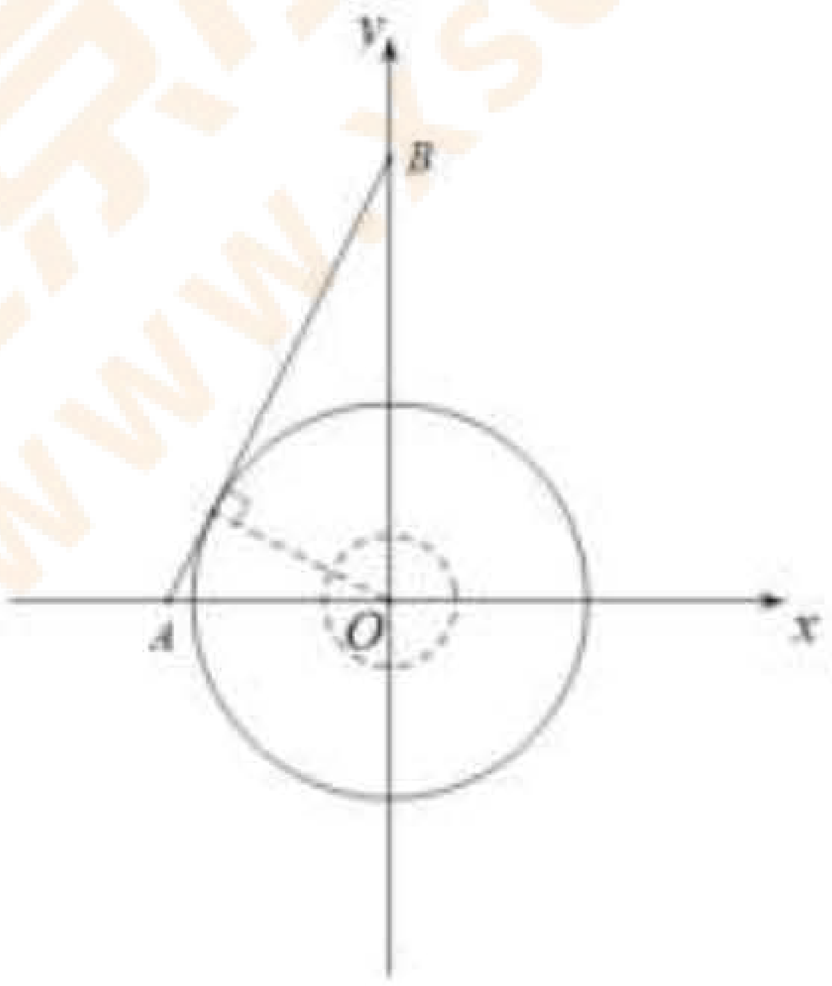
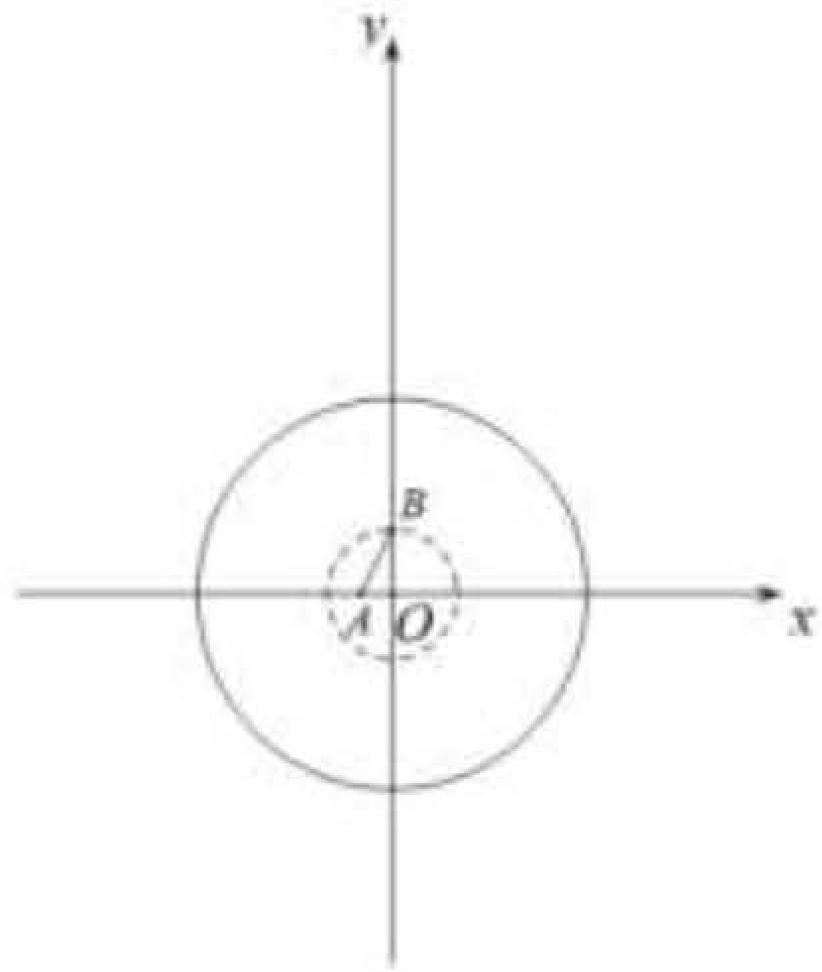


图2

28．（1）①P_1，P_3．

②如图所示





可得$1<b\le 3\sqrt{5}$，同理可得$-3\sqrt{5}\le b<-1$．

（2）$1-2\sqrt{2}\le m<-1$　$1+\dfrac{\sqrt{3}}{3}<m\le 2\sqrt{2}$