2019 北京丰台区高三一模

数　　学（理）

2019．03

（本试卷满分共 150 分，考试时间 120 分钟）

注意事项：

1．答题前，考生务必先将答题卡上的学校、年级、班级、姓名、准考证号用黑色字迹签字笔填写清楚，并认真核对条形码上的准考证号、姓名，在答题卡的“条形码粘贴区”贴好条形码。

2．本次考试所有答题均在答题卡上完成。选择题必须使用 2B 铅笔以正确填涂方式将各小题对应选项涂黑，如需改动，用橡皮擦除干净后再选涂其它选项。非选择题必须使用标准黑色字迹签字笔书写，要求字体工整、字迹清楚。

3．请严格按照答题卡上题号在相应答题区内作答，超出答题区域书写的答案无效，在试卷、草稿纸上答题无效。

4．请保持答题卡卡面清洁，不要装订、不要折叠、不要破损。

第一部分　（选择题　共 40 分）

一、选择题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分。在每小题列出的四个选项中，选出符合题目要求的一项。

1．复数 $z=\dfrac{1}{1+\mathrm{i}}$ 的共轭复数是

（A）$\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2}\mathrm{i}$　（B）$\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{2}\mathrm{i}$　（C）$1+\mathrm{i}$　（D）$1-\mathrm{i}$

2．已知集合 $A=\{-2,3,1\}$，集合 $B=\{3,m^2\}$．若 $B\subseteq A$，则实数 m 的取值集合为

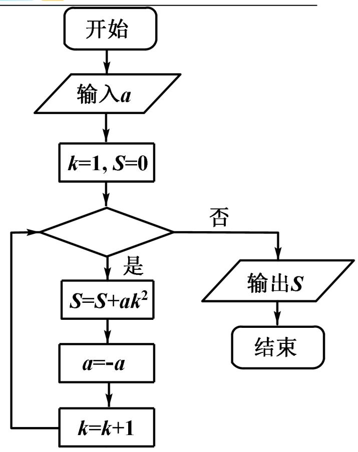
（A）$\{1\}$　（B）$\{\sqrt{3}\}$　（C）$\{1,-1\}$　（D）$\{\sqrt{3},-\sqrt{3}\}$

3．设命题 p：$\forall x\in(0,+\infty),\ln x\leqslant x-1$，则 $\neg p$ 为

（A）$\forall x\in(0,+\infty)$，$\ln x>x-1$　（B）$\exists x_0\in(0,+\infty),\ln x_0\leqslant x_0-1$

（C）$\forall x\notin(0,+\infty),\ln x>x-1$　（D）$\exists x_0\in(0,+\infty)$，$\ln x_0>x_0-1$

4．执行如图所示的程序框图，如果输入的 $a=1$，输出的 $S=15$，那么判断框内的条件可以为



（A）$k<6$

（B）$k\leqslant 6$

（C）$k>6$

（D）$k>7$

5．下列函数中，同时满足：①图象关于 y 轴对称；②$\forall x_1,x_2\in(0,+\infty)(x_1\neq x_2)$，$\dfrac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}>0$ 的是

（A）$f(x)=x^{-1}$　　（B）$f(x)=\log_2|x|$

（C）$f(x)=\cos x$　　（D）$f(x)=2^{x+1}$

6．已知 α 和 β 是两个不同平面，$\alpha\cap\beta=l$，l_1,l_2 是与 l 不同的两条直线，且 $l_1\subset\alpha$，$l_2\subset\beta$，$l_1/\!/l_2$，那么下列命题正确的是

（A）l 与 l_1,l_2 都不相交　　（B）l 与 l_1,l_2 都相交

（C）l 恰与 l_1,l_2 中的一条相交　　（D）l 至少与 l_1,l_2 中的一条相交

7．已知 F_1,F_2 为椭圆 $M:\dfrac{x^2}{m^2}+\dfrac{y^2}{2}=1$ 和双曲线 $N:\dfrac{x^2}{n^2}-y^2=1$ 的公共焦点，P 为它们的一个公共点，且 $PF_1\perp F_1F_2$，那么椭圆 M 和双曲线 N 的离心率之积为

（A）$\sqrt{2}$　　（B）1　　（C）$\dfrac{\sqrt{2}}{2}$　　（D）$\dfrac{1}{2}$

8．在平面直角坐标系中，如果一个多边形的顶点全是格点（横纵坐标都是整数），那么称该多边形为格点多边形．若 $\triangle ABC$ 是格点三角形，其中 $A(0,0)$，$B(4,0)$，且面积为 8，则该三角形边界上的格点个数不可能为

（A）6　　（B）8　　（C）10　　（D）12

第二部分　（非选择题　共 110 分）

二、填空题共 6 小题，每小题 5 分，共 30 分。

9．已知平面向量 $\boldsymbol{a}=(1,-3)$，$\boldsymbol{b}=(-2,m)$，且 $\boldsymbol{a}/\!/\boldsymbol{b}$，那么 $m=$____.

10．从 4 名男生、2 名女生中选派 3 人参加社区服务．如果要求恰有 1 名女生，那么不同的选派方案种数为____．

11．直线 $y=kx+1$ 与圆 $\begin{cases}x=2\cos\alpha,\\ y=3+2\sin\alpha\end{cases}$（$\alpha$ 为参数）相交于 M,N 两点．若 $|MN|=2\sqrt{3}$，则 $k=$____．

12．若 $\triangle ABC$ 的面积为 $2\sqrt{3}$，且 $A=\frac{\pi}{3}$，则 $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=$____．

13．已知函数 $f(x)=\cos(2x+\varphi)(-\frac{\pi}{2}<\varphi<0)$．

①函数 $f(x)$ 的最小正周期为____；

②若函数 $f(x)$ 在区间 $[\frac{\pi}{3},\frac{4\pi}{3}]$ 上有且只有三个零点，则 φ 的值是____．

14．已知数列 $\{a_n\}$ 对任意的 $n\in\mathbf{N}^*$，都有 $a_n\in\mathbf{N}^*$，且 $a_{n+1}=\begin{cases}3a_n+1, & a_n\text{为奇数},\\ \frac{a_n}{2}, & a_n\text{为偶数}.\end{cases}$

①当 $a_1=8$ 时，$a_{2019}=$____；

②若存在 $m\in\mathbf{N}^*$，当 $n>m$ 且 a_n 为奇数时，a_n 恒为常数 p，则 $p=$____．

三、解答题共 6 小题，共 80 分。解答应写出文字说明、演算步骤或证明过程。

15．（本小题 13 分）

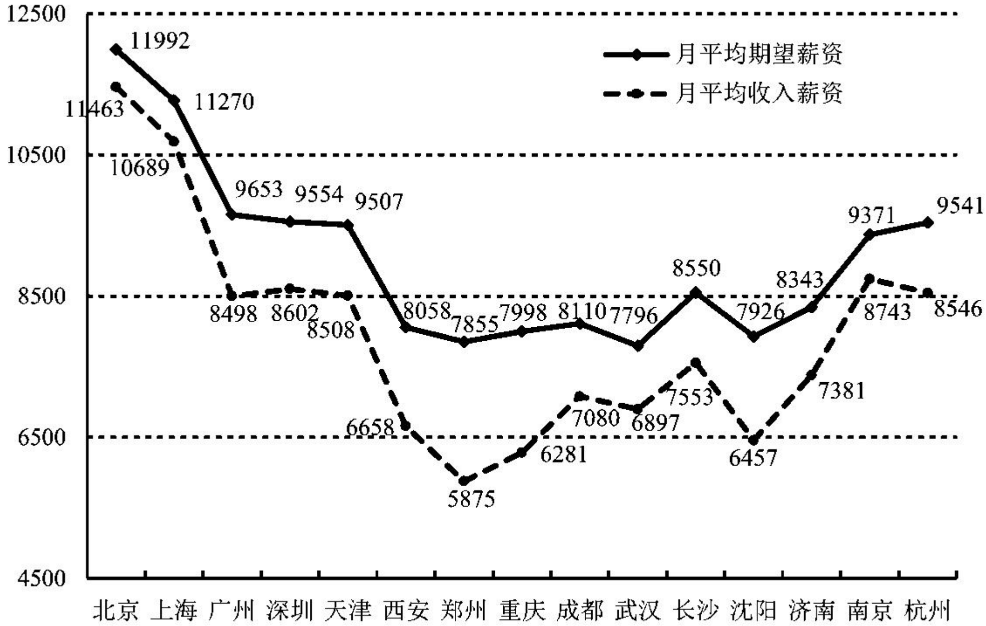
已知函数 $f(x)=\cos(2x-\frac{\pi}{3})-2\sin^2x+a(a\in\mathbf{R})$，且 $f(\frac{\pi}{3})=0$．

（Ⅰ）求 a 的值；

（Ⅱ）若 $f(x)$ 在区间 $[0,m]$ 上是单调函数，求 m 的最大值．

16．（本小题 13 分）

随着经济全球化、信息化的发展，企业之间的竞争从资源的争夺转向人才的竞争．吸引、留住培养和用好人才成为人力资源管理的战略目标和紧迫任务．在此背景下，某信息网站在 15 个城市中对刚毕业的大学生的月平均收入薪资和月平均期望薪资做了调查，数据如下图所示．



（Ⅰ）若某大学毕业生从这 15 座城市中随机选择一座城市就业，求该生选中月平均收入薪资高于 8500 元的城市的概率；

（Ⅱ）现有 2 名大学毕业生在这 15 座城市中各随机选择一座城市就业，且 2 人的选择相互独立．记 X 为选中月平均收入薪资高于 8500 元的城市的人数，求 X 的分布列和数学期望 $E(X)$；

（Ⅲ）记图中月平均收入薪资对应数据的方差为 ${s_1}^2$，月平均期望薪资对应数据的方差为 s_2^2，判断 ${s_1}^2$ 与 s_2^2 的大小．（只需写出结论）

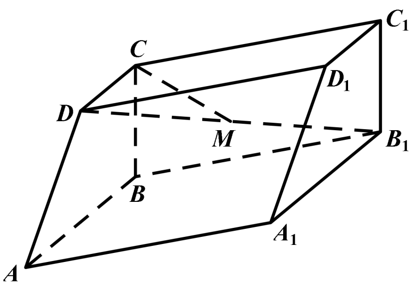
17．（本小题 14 分）

如图，四棱柱 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，底面 $ABCD$ 为直角梯形，$AB/\!/CD$，$AB\perp BC$，平面 $ABCD\perp$ 平面 ABB_1A_1，$\angle BAA_1=60^\circ$，$AB=AA_1=2BC=2CD=2$．

（Ⅰ）求证：$BC\perp AA_1$；

（Ⅱ）求二面角 $D-AA_1-B$ 的余弦值；

（Ⅲ）在线段 DB_1 上是否存在点 M，使得 $CM/\!/$ 平面 DAA_1？若存在，求 $\dfrac{DM}{DB_1}$ 的值；若不存在，请说明理由．



18. （本小题 13 分）

已知函数 $f(x)=(x-2)\mathrm{e}^x-\frac{1}{3}ax^3+\frac{1}{2}ax^2$.

（Ⅰ）当 $a=0$ 时，求函数 $f(x)$ 的单调区间；

（Ⅱ）当 $a\leqslant \mathrm{e}$ 时，求证：$x=1$ 是函数 $f(x)$ 的极小值点.

19. （本小题 14 分）

已知抛物线 $C: y^2=2px$ 过点 $M(2,2)$， A,B 是抛物线 C 上不同两点，且 $AB/\!/OM$ （其中 O 是坐标原点），直线 AO 与 BM 交于点 P，线段 AB 的中点为 Q .

（Ⅰ）求抛物线 C 的准线方程；

（Ⅱ）求证：直线 PQ 与 x 轴平行.

20. （本小题 13 分）

设 $n\in\mathbf{N}^*$ 且 $n\geqslant 2$ ，集合 $S_n=\{(x_1,x_2,\cdots,x_n)\,\|\,x_1|=1,|x_{i+1}|=2|x_i|\,(i=1,2,\cdots,n-1)\}$.

（Ⅰ）写出集合 S_2 中的所有元素；

（Ⅱ）设 $(a_1,a_2,\cdots,a_n)$， $(b_1,b_2,\cdots,b_n)\in S_n$ ，证明：“ $\sum\limits_{i=1}^{n}a_i=\sum\limits_{i=1}^{n}b_i$ ” 的充要条件是“ $a_i=b_i(i=1,2,3,\cdots,n)$ ”；

（Ⅲ）设集合 $T_n=\{\sum\limits_{i=1}^{n}x_i\,|\,(x_1,x_2,\cdots,x_n)\in S_n\}$ ，求 T_n 中所有正数之和.

（考生务必将答案答在答题卡上，在试卷上作答无效）

数学试题答案

一、选择题（共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分）

题号	1	2	3	4	5	6	7	8
答案	A	C	D	A	B	A	B	C

二、填空题（共 6 小题，每小题 5 分，共 30 分。有两空的小题，第一空 3 分，第二空 2 分）

9．6　　10．12　　11．$\pm\sqrt{3}$

12．4　　13．π；$-\dfrac{\pi}{6}$　　14．2；1

三、解答题（共 6 小题，共 80 分）

15.（共 13 分）

解：（Ⅰ）$f(x)=\cos(2x-\dfrac{\pi}{3})-2\sin^2 x+a$

$$=\frac{1}{2}\cos 2x+\frac{\sqrt{3}}{2}\sin 2x+\cos 2x-1+a$$

$$=\frac{3}{2}\cos 2x+\frac{\sqrt{3}}{2}\sin 2x-1+a$$

$$=\sqrt{3}(\frac{\sqrt{3}}{2}\cos 2x+\frac{1}{2}\sin 2x)-1+a$$

$$=\sqrt{3}\sin(2x+\frac{\pi}{3})-1+a.$$

因为 $f(\dfrac{\pi}{3})=0$，

所以 $a=1$.

（Ⅱ）解法 1：因为 函数 $y=\sin x$ 的增区间为$[2k\pi-\dfrac{\pi}{2},2k\pi+\dfrac{\pi}{2}],k\in\mathbf{Z}$.

由 $2k\pi-\dfrac{\pi}{2}\leqslant 2x+\dfrac{\pi}{3}\leqslant 2k\pi+\dfrac{\pi}{2}$， $k\in\mathbf{Z}$，

所以 $k\pi-\dfrac{5\pi}{12}\leqslant x\leqslant k\pi+\dfrac{\pi}{12}$， $k\in\mathbf{Z}$.

所以 函数 $f(x)$ 的单调递增区间为$[k\pi-\dfrac{5\pi}{12},k\pi+\dfrac{\pi}{12}]$， $k\in\mathbf{Z}$.

因为 函数 $f(x)$ 在$[0,m]$上是单调函数，

所以 m 的最大值为 $\frac{\pi}{12}$.

解法 2：因为 $x\in[0,m]$，

所以 $\frac{\pi}{3}\leqslant 2x+\frac{\pi}{3}\leqslant 2m+\frac{\pi}{3}$.

因为 $[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$ 是函数 $y=\sin x$ 的增区间，

所以 $2m+\frac{\pi}{3}\leqslant\frac{\pi}{2}$.

所以 $m\leqslant\frac{\pi}{12}$.

所以 m 的最大值为 $\frac{\pi}{12}$.

16. （共 13 分）

解：（Ⅰ）设该生选中月平均收入薪资高于 8500 元的城市为事件 A.

因为 15 座城市中月平均收入薪资高于 8500 元的有 6 个，

所以 $P(A)=\frac{2}{5}$.

（Ⅱ）由（Ⅰ）知选中平均薪资高于 8500 元的城市的概率为 $\frac{2}{5}$，低于 8500 元的概率为 $\frac{3}{5}$，

所以 $X\sim B(2,\frac{2}{5})$.

$P(X=0)=(\frac{3}{5})^2=\frac{9}{25}$；

$P(X=1)=C_2^1\times\frac{2}{5}\times\frac{3}{5}=\frac{12}{25}$；

$P(X=2)=C_2^2\times(\frac{2}{5})^2=\frac{4}{25}$.

所以随机变量 X 的分布列为：

P	0	1	2
X	$\frac{9}{25}$	$\frac{12}{25}$	$\frac{4}{25}$

所以 X 的数学期望为 $E(X)=2\times\frac{2}{5}=\frac{4}{5}$.

（Ⅲ）$s_1^{\ 2}>s_2^{\ 2}$.

17.（共 14 分）

解：（Ⅰ）因为 平面 $ABCD\perp$ 平面 ABB_1A_1，平面 $ABCD\cap$ 平面 $ABB_1A_1=AB$， $AB\perp BC$，

$BC\subset$ 平面 $ABCD$，

所以 $BC\perp$ 平面 ABB_1A_1.

因为 $AA_1\subset$ 平面 ABB_1A_1，

所以 $BC\perp AA_1$.

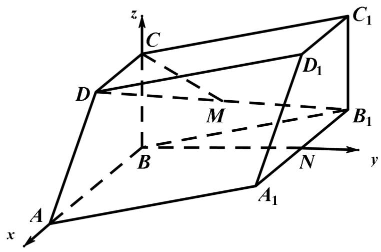
（Ⅱ）取 A_1B_1 的中点 N，连结 BN.

平行四边形 ABB_1A_1 中 $AB=AA_1$， $\angle BAA_1=60^\circ$. 易证 $BN\perp A_1B_1$.

由（Ⅰ）知 $BC\perp$ 平面 ABB_1A_1.

故以为 B 原点， BA，BN，BC 所在直线为坐标轴，

建立如图所示空间直角坐标系 $B-xyz$.



依题意， $A(2,0,0),A_1(1,\sqrt{3},0),D(1,0,1)$，

设平面 DAA_1 的一个法向量为 $\boldsymbol{n}=(x,y,z)$

则 $\overrightarrow{AA_1}=(-1,\sqrt{3},0)$， $\overrightarrow{AD}=(-1,0,1)$

则 $\begin{cases}\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{AA_1}=0\\ \boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{AD}=0\end{cases}$， 即 $\begin{cases}-x+\sqrt{3}y=0\\ -x+z=0\end{cases}$，

令 $y=1$，得 $\boldsymbol{n}=(\sqrt{3},1,\sqrt{3})$.

易知平面 ABB_1A_1 的一个法向量为 $\boldsymbol{m}=(0,0,1)$，

设二面角 $D-AA_1-B$ 的平面角为 α，可知 α 为锐角，

则 $\cos\alpha=\left|\cos<\boldsymbol{n},\boldsymbol{m}>\right|=\dfrac{\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{m}}{|\boldsymbol{n}|\cdot|\boldsymbol{m}|}=\dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{3+1+3}}=\dfrac{\sqrt{21}}{7}$，

即二面角 $D-AA_1-B$ 的余弦值为 $\dfrac{\sqrt{21}}{7}$.

（Ⅲ）解：设 $\overrightarrow{DM}=\lambda\overrightarrow{DB_1}$， $\lambda\in[0,1]$， $M(x,y,z)$.

因为 $D(1,0,1)$， $B_1(-1,\sqrt{3},0)$， $C(0,0,1)$，

所以 $\overrightarrow{DB_1}=(-2,\sqrt{3},-1),\overrightarrow{DM}=(x-1,y,z-1)$

所以 $x=1-2\lambda,y=\sqrt{3}\lambda,z=1-\lambda$.

$M(1-2\lambda,\sqrt{3}\lambda,1-\lambda)$

$\overrightarrow{CM}=(1-2\lambda,\sqrt{3}\lambda,-\lambda)$

因为 $CM//$ 平面 DAA_1

所以 $\overrightarrow{CM}\cdot\boldsymbol{n}=0$

即 $\sqrt{3}(1-2\lambda)+\sqrt{3}\lambda-\sqrt{3}\lambda=0$，所以 $\lambda=\dfrac{1}{2}$.

所以存在点 M，使得 $CM//$ 平面 DAA_1，此时 $\dfrac{DM}{DB_1}=\dfrac{1}{2}$.

18.（共 13 分）

解：（Ⅰ）因为 $a=0$，$x\in\mathrm{R}$ 所以 $f(x)=(x-2)\mathrm{e}^x$，

故 $f'(x)=(x-1)\mathrm{e}^x$，

令 $f'(x)>0$，得 $x>1$，所以单调递增区间为 $(1,+\infty)$；

令 $f'(x)<0$，得 $x<1$，所以单调递区间为 $(-\infty,1)$.

（Ⅱ）由题可得 $f'(x)=(x-1)(\mathrm{e}^x-ax)$.

① 当 $a\leqslant 0$ 时，对任意 $x\in(0,+\infty)$，都有 $\mathrm{e}^x-ax>0$ 恒成立，

所以当 $0<x<1$ 时，$f'(x)<0$；当 $x>1$ 时，$f'(x)>0$.

所以函数 $f(x)$ 在 $x=1$ 处取得极小值，符合题意.

② 当 $0<a\leqslant\mathrm{e}$ 时，设 $\mathrm{g}(x)=\mathrm{e}^x-ax$，依然取 $x\in(0,+\infty)$.

则 $\mathrm{g}'(x)=\mathrm{e}^x-a$，令 $\mathrm{g}'(x)=0$，得 $x=\ln a$，

所以 $\mathrm{g}(x)$ 在 $(0,\ln a)$ 上单调递减，在区间 $(\ln a,+\infty)$ 上单调递增，

所以 $\mathrm{g}(x)_{\min}=g(\ln a)=a(1-\ln a)$.

因为 $0<a\leqslant\mathrm{e}$，所以 $g(x)_{\min}=a(1-\ln a)\geqslant 0$（当且仅当 a=e 时，等号成立，此时 $x=1$）.

所以对任意 $x\in(0,1)\cup(1,+\infty)$，都有 $\mathrm{e}^x-ax>0$ 恒成立.

所以当 $0<x<1$ 时，$f'(x)<0$；当 $x>1$ 时，$f'(x)>0$.

所以函数 $f(x)$ 在 $x=1$ 处取得极小值，符合题意.

综上①②可知：当 $a\leqslant\mathrm{e}$ 时 $x=1$ 是函数 $f(x)$ 的极小值点.

19.（共 14 分）

解：（Ⅰ）由题意得 $2^2=4p$，解得 $p=1$.

所以抛物线 C 的准线方程为 $x=-\dfrac{p}{2}=-\dfrac{1}{2}$.

（Ⅱ）设 $A\left(\dfrac{y_1^2}{2},y_1\right),B\left(\dfrac{y_2^2}{2},y_2\right)$，

由 $AB/\!/OM$ 得 $k_{AB}=k_{OM}=1$，则 $\dfrac{y_2-y_1}{\dfrac{y_2^2}{2}-\dfrac{y_1^2}{2}}=\dfrac{2}{y_2+y_1}=1$，所以 $y_2+y_1=2$.

所以线段 AB 中点 Q 的为纵坐标 $y_Q=1$.

直线 AO 方程为 $y=\dfrac{y_1}{\dfrac{y_1^2}{2}}x=\dfrac{2}{y_1}x$---①

直线 BM 方程为 $y-2=\dfrac{y_2-2}{\dfrac{y_2^2}{2}-2}(x-2)=\dfrac{2}{y_2+2}(x-2)$---②

联立①②解得 $\begin{cases}x=\dfrac{y_1}{2}\\ y=1\end{cases}$，即点 P 的为纵坐标 $y_P=1$.

如果直线 BM 斜率不存在，结论也显然成立.

所以直线 PQ 与 x 轴平行.

20. （共 13 分）

解：（Ⅰ）因为 $|x_1|=1$，所以 $|x_2|=2$，

所以 S_2 中的元素有 $(1,2),(1,-2),(-1,2),(-1,-2)$.

（Ⅱ）先证充分性

因为对于任意的 $i\in\{1,2,3,\cdots,n\}$，都有 $a_i=b_i$，所以 $\sum\limits_{i=1}^{n}a_i=\sum\limits_{i=1}^{n}b_i$.

再证必要性

因为 $|x_1|=1,|x_{i+1}|=2|x_i|$，所以数列 $\{|x_i|\}$ 是以 1 为首项，2 为公比的等比数列，所以 $|x_i|=2^{i-1}$.

假设存在 $j\in\{2,3,\cdots,n\}$，使得 $|a_j|=|b_j|$.

所以 $a_j=b_j$ 或 $a_j=-b_j$.

若 $a_j=-b_j$，不妨设 $a_j>0$，则 $b_j<0$，

因为 $|a_1|=|b_1|=1$，$\sum\limits_{i=1}^{j-1}x_i\leqslant\sum\limits_{i=1}^{j-1}|x_i|=\dfrac{1-2^{j-1}}{1-2}=2^{j-1}-1<|x_j|=2^{j-1}$.

所以 $\sum\limits_{i=1}^{j}a_i>0$，$\sum\limits_{i=1}^{j}b_i<0$，这与 $\sum\limits_{i=1}^{j}a_i=\sum\limits_{i=1}^{j}b_i$ 矛盾.

所以 $a_j = b_j$.

当 $j=2$ 时，必有 $a_1 = b_1$.

所以 对于任意 $i \in \{1,2,3,\cdots,n\}$，都有 $a_i = b_i$.

综上所述，“$\sum_{i=1}^{n} a_i = \sum_{i=1}^{n} b_i$”的充要条件是“$a_i = b_i\ (i=1,2,3,\cdots,n)$”.

（III）因为 $\sum_{i=1}^{n-1} x_i \leqslant \sum_{i=1}^{n-1} |x_i| = \frac{1-2^{n-1}}{1-2} = 2^{n-1} - 1 < |x_n| = 2^{n-1}$，

所以 $\sum_{i=1}^{n} x_i$ 为正数，当且仅当 $x_n > 0$.

因为 对于任意的正整数 $k<n$，$x_k = 2^{k-1}$ 或 -2^{k-1}，所以集合 T_n 中，元素为正数的个数为

$\underbrace{C_2^1 C_2^1 \cdots C_2^1}_{n-1\text{个}} = 2^{n-1}$，

所以 所有的正数元素的和为 $2^{n-1} x_n = 2^{n-1} \cdot 2^{n-1} = 4^{n-1}$.

（若用其他方法解题，请酌情给分）