燕山地区 2023—2024 学年第一学期九年级期末考试

数 学 试 卷

2024 年 1 月

考生须知	1．本试卷共 8 页，共三道大题，28 道小题。满分 100 分。考试时间 120 分钟。 2．在试卷和答题卡上准确填写学校名称、班级、姓名和考号。 3．试题答案一律填涂或书写在答题卡上，在试卷上作答无效。 4．在答题卡上，选择题、画图题用 2B 铅笔作答，其它试题用黑色字迹签字笔作答。 5．考试结束，请将本试卷和答题卡一并交回。

一、选择题（共 16 分，每题 2 分）

第 1 － 8 题均有四个选项，符合题意的选项**只有一个**．

1．下列图案是我国国产品牌汽车的标识，其中是中心对称图形的是

A．　　B．　　C．　　D．

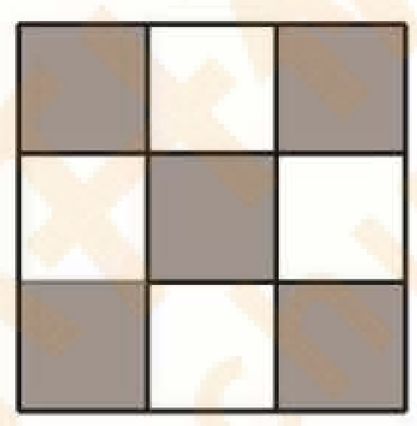
2．已知点 P 在半径为 r 的⊙O 内，且 $OP=3$，则 r 的值可能为

A．1　　B．2　　C．3　　D．4

3．下列函数中，当 $x>0$ 时，y 随 x 的增大而减小的是

A．$y=x$　　B．$y=x+1$　　C．$y=x^2$　　D．$y=-x^2$

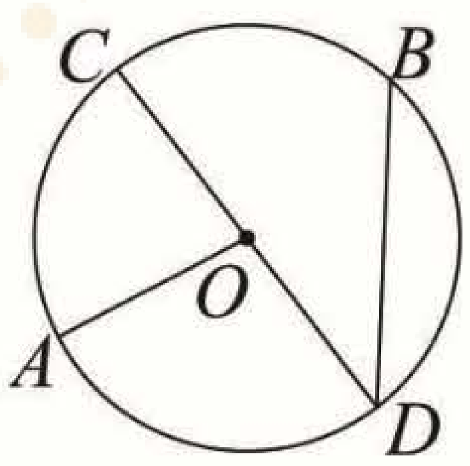
4．一个小球在如图所示的地板上自由滚动，并随机停留在某块方砖上．如果每一块方砖除颜色外完全相同，则小球最终停留在白砖上的概率是



A．$\frac{1}{3}$　　B．$\frac{4}{9}$

C．$\frac{5}{9}$　　D．$\frac{2}{3}$

5．如图，点 A，B 在⊙O 上，点 C 是劣弧 $\overset{\frown}{AB}$ 的中点，$\angle AOC=80°$，则$\angle CDB$ 的大小为



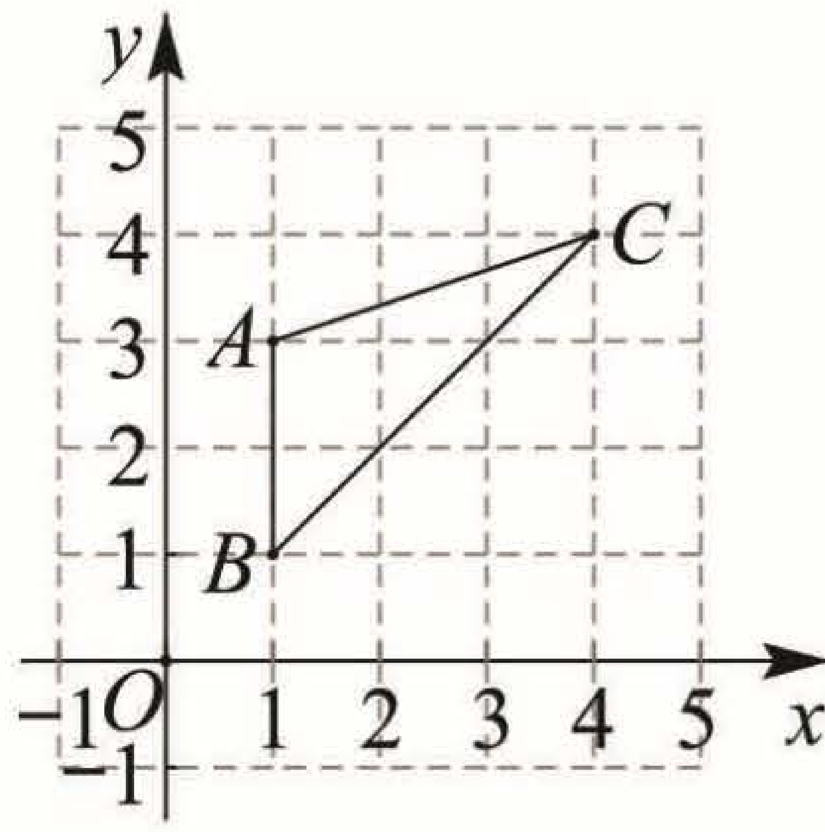
A．40°　　B．45°

C．60°　　D．80°

6．电影《志愿军：雄兵出击》于国庆档上映，首周累计票房约 3.5 亿元，第三周累计票房约 6.8 亿元．若每周累计票房的增长率相同，设增长率为 x，根据题意可列方程为

A．$3.5x^2 = 6.8$　　B．$3.5(1+x) = 6.8$

C．$3.5(1+x)^2 = 6.8$　　D．$3.5(1-x)^2 = 6.8$



7．如图，在平面直角坐标系 xOy 中，$\triangle ABC$ 的三个顶点都在格点上，则$\triangle ABC$ 外接圆的圆心坐标为

A．(3，2)　　B．(2，3)

C．(2，2)　　D．(3，3)

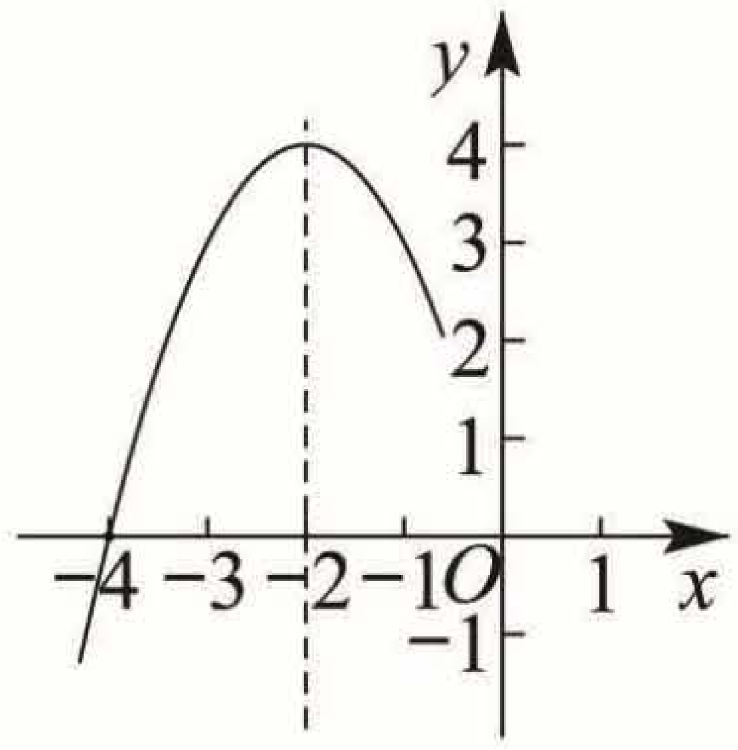
8．平面直角坐标系 xOy 中，已知二次函数 $y = ax^2 + bx(a \neq 0)$ 的部分图象如图所示，给出下面三个结论：

① $a \cdot b > 0$；

② 二次函数 $y = ax^2 + bx(a \neq 0)$ 有最大值 4；

③ 关于 x 的方程 $ax^2 + bx = 0$ 有两个实数根 $x_1 = -4$，$x_2 = 0$．

上述结论中，所有正确结论的序号是



A．①②　　B．①③

C．②③　　D．①②③

二、填空题（共 16 分，每题 2 分）

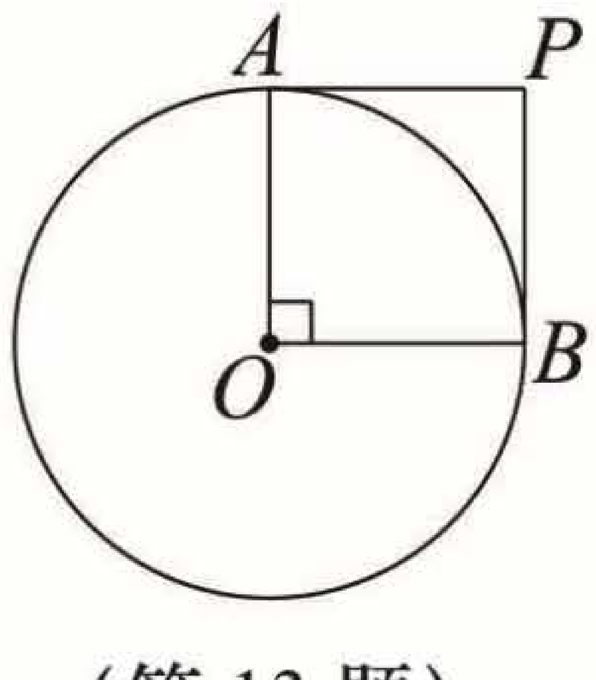
9．平面直角坐标系 xOy 中，与点 $P(-4，1)$ 关于原点对称的点的坐标是________．

10．一元二次方程 $x(x-3) = x-3$ 的解是________．

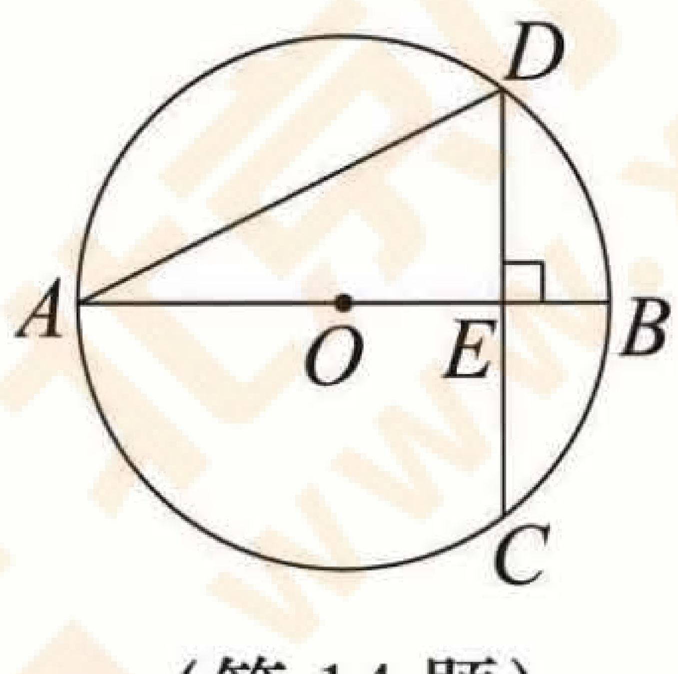
11．将抛物线 $y = \dfrac{1}{2}x^2$ 向左平移 1 个单位长度，得到抛物线的解析式为________．

12．已知某二次函数的图象开口向上，且顶点坐标为 (1，3)，则这个二次函数解析式可以是________．

13．如图，PA，PB 是⊙O 的两条切线，切点为 A，B，若 $\angle AOB = 90°$，$PA = 3$，则⊙O 的半径为________．



（第 13 题）



（第 14 题）

14．如图，AB 是⊙O 的直径，弦 $CD \perp AB$ 于点 E，连接 AD，若 $OE = 3$，$CD = 8$，则 AD 的长为________．

15．在一个不透明的盒子中共装有 40 个球，其中有 a 个红球，这些球除颜色外无其它差别．为估计 a 的值，小颖做摸球试验，她将盒子里面的球充分搅匀，任意摸出 1 个球记下颜色再放回，不断重复上述过程，记录实验数据如下：

摸球的次数 n	20	50	100	200	300	400	500
摸到红球的次数 m	13	32	62	117	181	238	301
摸到红球的频率 $\frac{m}{n}$	0.65	0.64	0.62	0.585	0.603	0.595	0.602

根据以上数据，估计 a 的值约为________．

16．2023 年第 19 届杭州亚运会的举办带热了吉祥物“宸宸、琮琮和莲莲”的销售．某网店经营亚运会吉祥物玩偶礼盒装，每盒进价为 30 元．当地物价部门规定，该礼盒销售单价最高不能超过 50 元 / 盒．在销售过程中发现该礼盒每周的销量 y(件) 与销售单价 x(元) 之间近似满足函数关系：$y=-2x+180(30\leqslant x\leqslant 50)$．

(1) 设该网店每周销售该礼盒所获利润为 w(元)，则 w 与 x 的函数关系式为________；

(2) 该网店每周销售该礼盒所获最大利润为________元．

三、解答题（共 68 分，第 17 — 19 题，每题 5 分，第 20 题 6 分，第 21 — 23 题，每题 5 分，第 24 — 26 题，每题 6 分，第 27 — 28 题，每题 7 分）解答应写出文字说明，演算步骤或证明过程．

17．解方程：$x^2+4x-12=0$．

18．已知 $x^2-2x-5=0$，求代数式 $3x(x-2)+(x-1)^2$ 的值．

19．2023 年 7 月 31 日，北京遭遇 140 年以来最大的暴雨，房山地区受灾严重．为了做好防汛救灾工作，某社区特招募志愿工作者，小东和小北积极报名参加，根据社区安排，志愿者被随机分到 A 组 (信息登记)，B 组 (物资发放)，C 组 (垃圾清运) 的其中一组．

(1) 小东被分配到 A 组是________事件 (填“必然”，“随机”或“不可能”)；

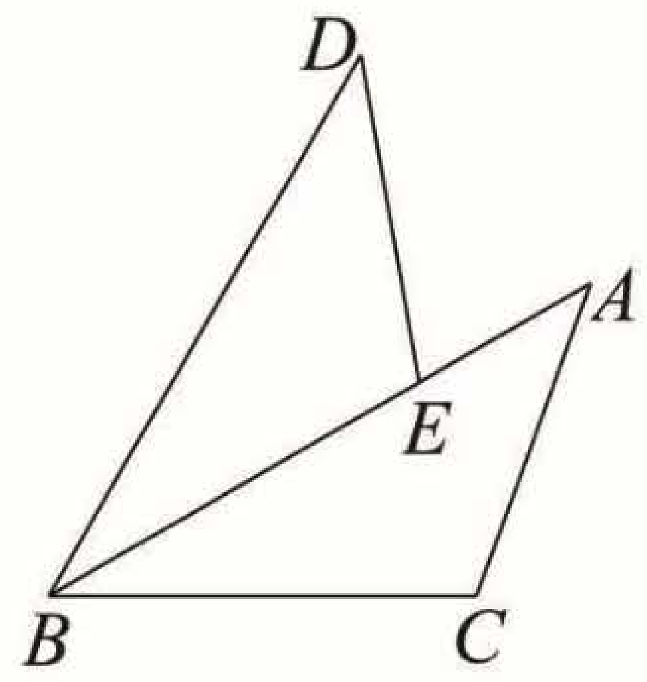
小东被分配到 A 组的概率是________．

(2) 请用列表或画树状图的方法，求出小东和小北被分配到同一组的概率．

20．如图，将$\triangle ABC$绕点B逆时针旋转得到$\triangle DBE$，点C的对应点E恰好落在AB上．

(1) 若$BC=6$，$BD=9$，求线段AE的长．

(2) 连接AD，若$\angle C=110^\circ$，$\angle BAC=40^\circ$，求$\angle BDA$的度数．



21．**阅读下面的材料**

一元二次方程及其解法最早出现在公元前两千年左右的古巴比伦人的《泥板文书》中．到了中世纪，阿拉伯数学家阿尔·花拉子米在他的代表作《代数学》中记载了求一元二次方程正数解的几何解法，我国三国时期的数学家赵爽在其所著《勾股圆方图注》中也给出了类似的解法．

以$x^2+10x=39$为例，花拉子米的几何解法步骤如下：

① 如图1，在边长为x的正方形的两个相邻边上作边长分别为x和5的矩形，再补上一个边长为5的小正方形，最终把图形补成一个大正方形；

② 一方面大正方形的面积为$(x+________)^2$，另一方面它又等于图中各部分面积之和，因为$x^2+10x=39$，可得方程$(x+________)^2=39+________$，则方程的正数解是$x=________$．

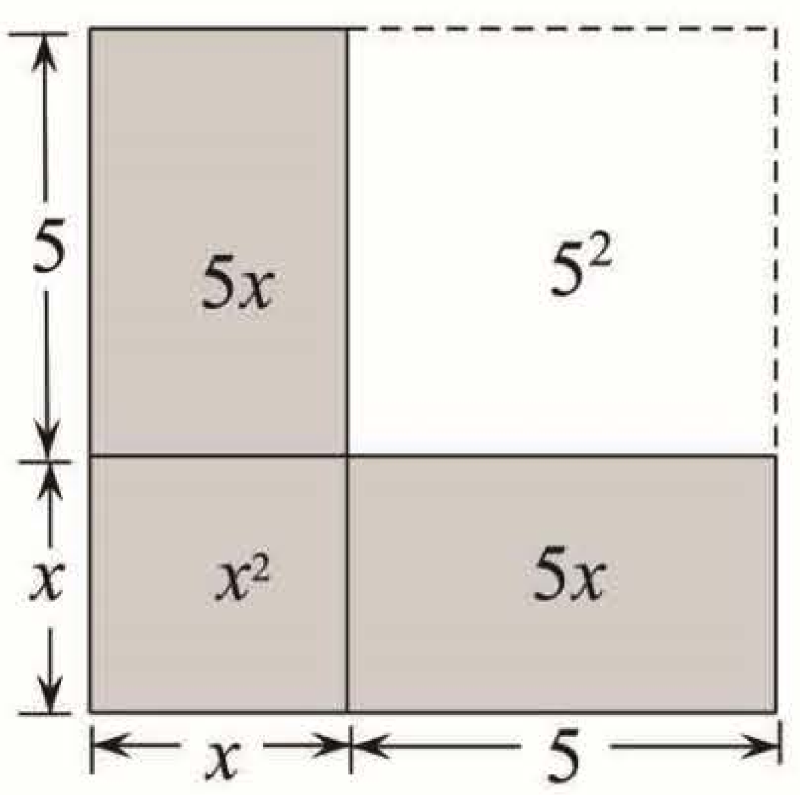


图1

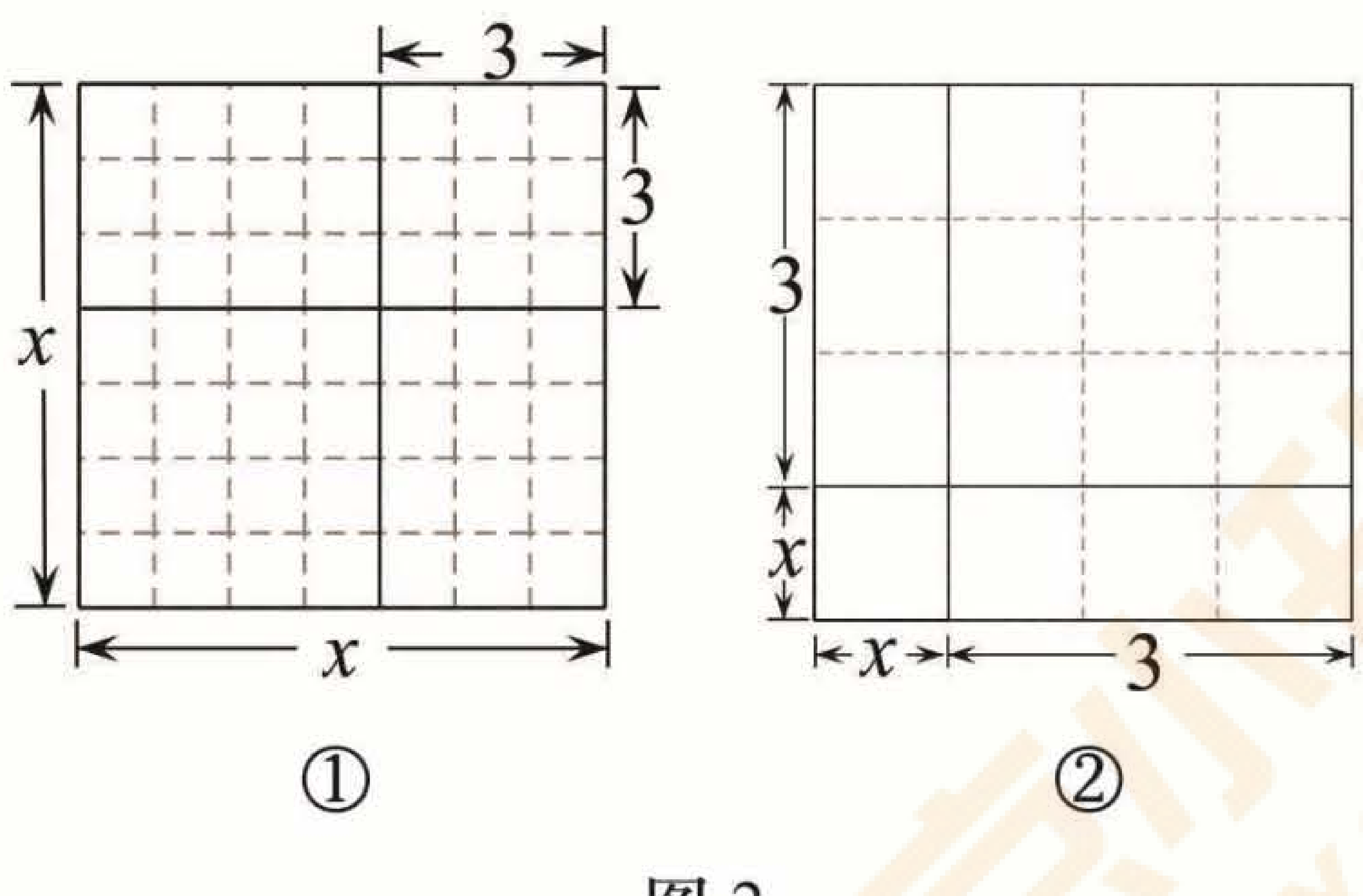


图2

根据上述材料，解答下列问题．

(1) 补全花拉子米的解法步骤②；

(2) 根据花拉子米的解法，在图2的两个构图①②中，能够得到方程$x^2-6x=7$的正数解的正确构图是________（填序号）．

密封线内不要答题

学校______ 班级______ 姓名______ 准考证号______

密封线内不要答题

22．已知关于 x 的一元二次方程 $x^2-2x+(m-2)=0$ 有两个不相等的实数根．

(1) 求 m 的取值范围；

(2) 若 m 为正整数，请你写出一个满足条件的 m 值，并求出此时方程的根．

23．已知二次函数 $y=ax^2+bx+3(a\neq 0)$ 的图象经过点 $A(1，0)$，$B(3，0)$．

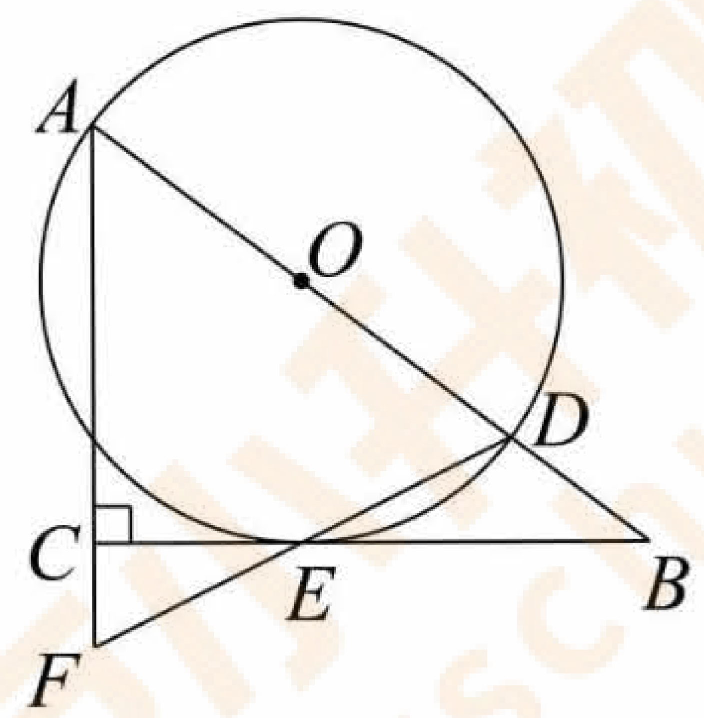
(1) 求该函数的解析式；

(2) 当 $x>3$ 时，对于 x 的每一个值，函数 $y=x+n$ 的值小于二次函数 $y=ax^2+bx+3$ 的值，结合函数图象，直接写出 n 的取值范围．

24．如图，在△ABC 中，∠$ACB=90°$，点 D 在 AB 上，以 AD 为直径作⊙O 与 BC 相切于点 E，连接 DE 并延长交 AC 的延长线于点 F．

(1) 求证：$AF=AD$；

(2) 若 $CE=4$，$CF=2$，求⊙O 的半径．



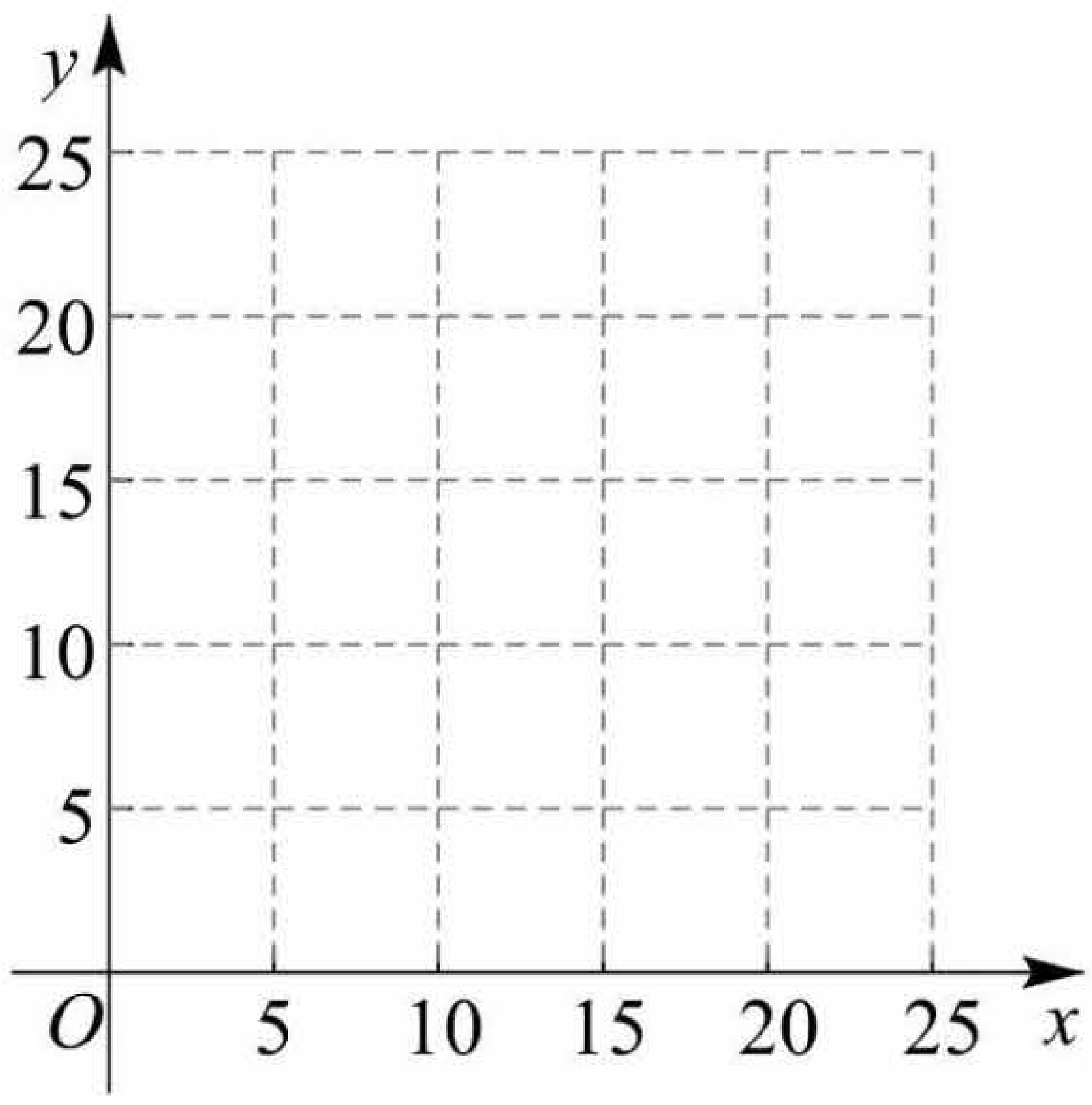
25．学校组织九年级学生进行跨学科主题学习活动，利用函数的相关知识研究某种化学试剂的挥发情况．在两种不同的场景 A 和场景 B 下做对比实验，设实验过程中，该试剂挥发时间为 x 分钟时，在场景 A，B 中的剩余质量分别为 y_1，y_2（单位：克）．

下面是某研究小组的探究过程，请补充完整：

记录 y_1，y_2 与 x 的几组对应值如下：

x（分钟）	0	5	10	15	20	…
y_1（克）	25	23.5	20	14.5	7	…
y_2（克）	25	20	15	10	5	…

(1) 在同一平面直角坐标系 xOy 中，描出上表中各组数值所对应的点 $(x,\ y_1)$，$(x,\ y_2)$，并画出函数 y_1，y_2 的图象；



(2) 进一步探究发现，场景 A 的图象是抛物线的一部分，y_1 与 x 之间近似满足函数关系 $y_1=-0.04x^2+bx+c$．场景 B 的图象是直线的一部分，y_2 与 x 之间近似满足函数关系 $y_2=ax+c(a\neq 0)$．请分别求出场景 A，B 满足的函数关系式；

(3) 查阅文献可知，该化学试剂的质量不低于 4 克时，才能发挥作用．在上述实验中，记该化学试剂在场景 A，B 中发挥作用的时间分别为 x_A，x_B，则 x_A________x_B（填">"，"="或"<"）．

26．在平面直角坐标系 xOy 中，点 $M(-1,\ m)$，$N(3,\ n)$ 在抛物线 $y=ax^2+bx+c(a>0)$ 上，设抛物线的对称轴为 $x=t$．

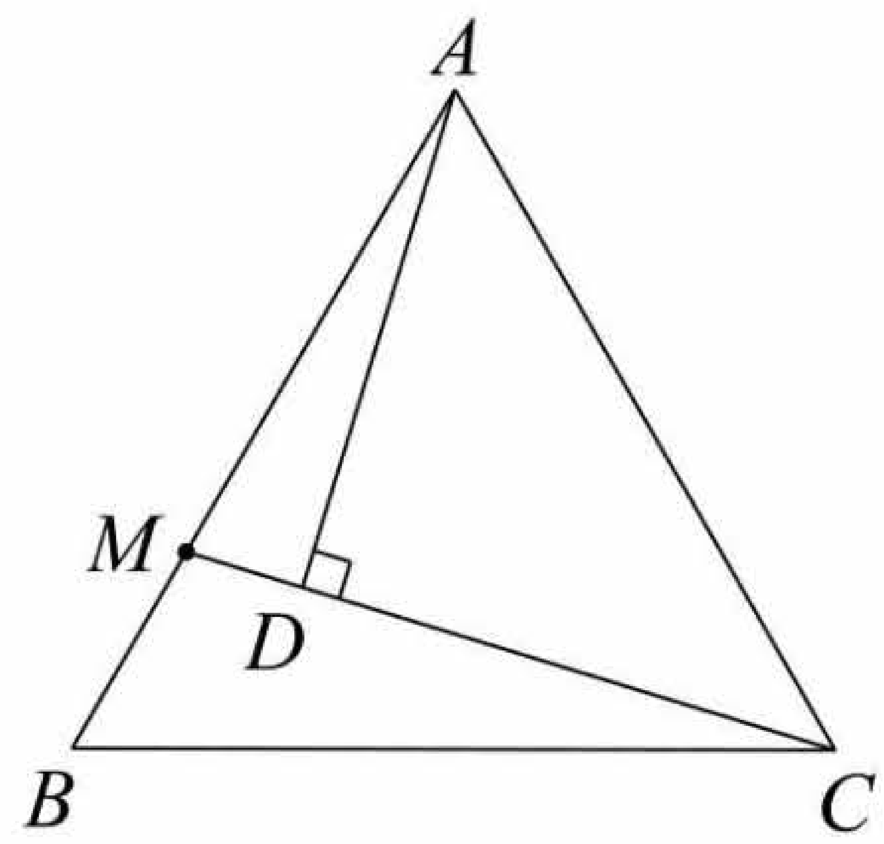
(1) 若 $m=n$，求 t 的值；

(2) 若 $c<m<n$，求 t 的取值范围．

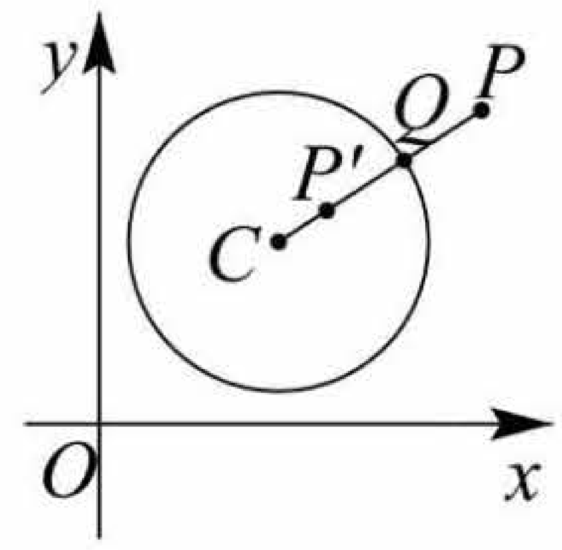
27．如图，$\triangle ABC$ 为等边三角形，点 M 为 AB 边上一点（不与点 A，B 重合），连接 CM，过点 A 作 $AD \perp CM$ 于点 D，将线段 AD 绕点 A 顺时针旋转 60° 得到线段 AE，连接 BE．

(1) 依题意补全图形，直接写出 $\angle AEB$ 的大小，并证明；

(2) 连接 ED 并延长交 BC 于点 F，用等式表示 BF 与 FC 的数量关系，并证明．



28．在平面直角坐标系 xOy 中，对于⊙C 和⊙C 外一点 P 给出如下定义：连接 CP 交⊙C 于点 Q，作点 P 关于点 Q 的对称点 P'，若点 P' 在线段 CQ 上，则称点 P 是⊙C 的“关联点”．例如，右图中 P 为⊙C 的一个“关联点”．



(1) ⊙O 的半径为 1．

① 如图 1，在点 $A(-\sqrt{2}，0)$，$B(2，2)$，$D(0，3)$ 中，⊙O 的“关联点”是______；

② 已知点 M 在直线 $y=\dfrac{\sqrt{3}}{3}x-2$ 上，且点 M 是⊙O 的“关联点”，求点 M 的横坐标 m 的取值范围．

(2) 直线 $y=-\sqrt{3}(x-1)$ 与 x 轴，y 轴分别交于点 E，点 F，⊙T 的圆心为 $T(t，0)$，半径为 2，若线段 EF 上所有点都是⊙T 的“关联点”，直接写出 t 的取值范围．

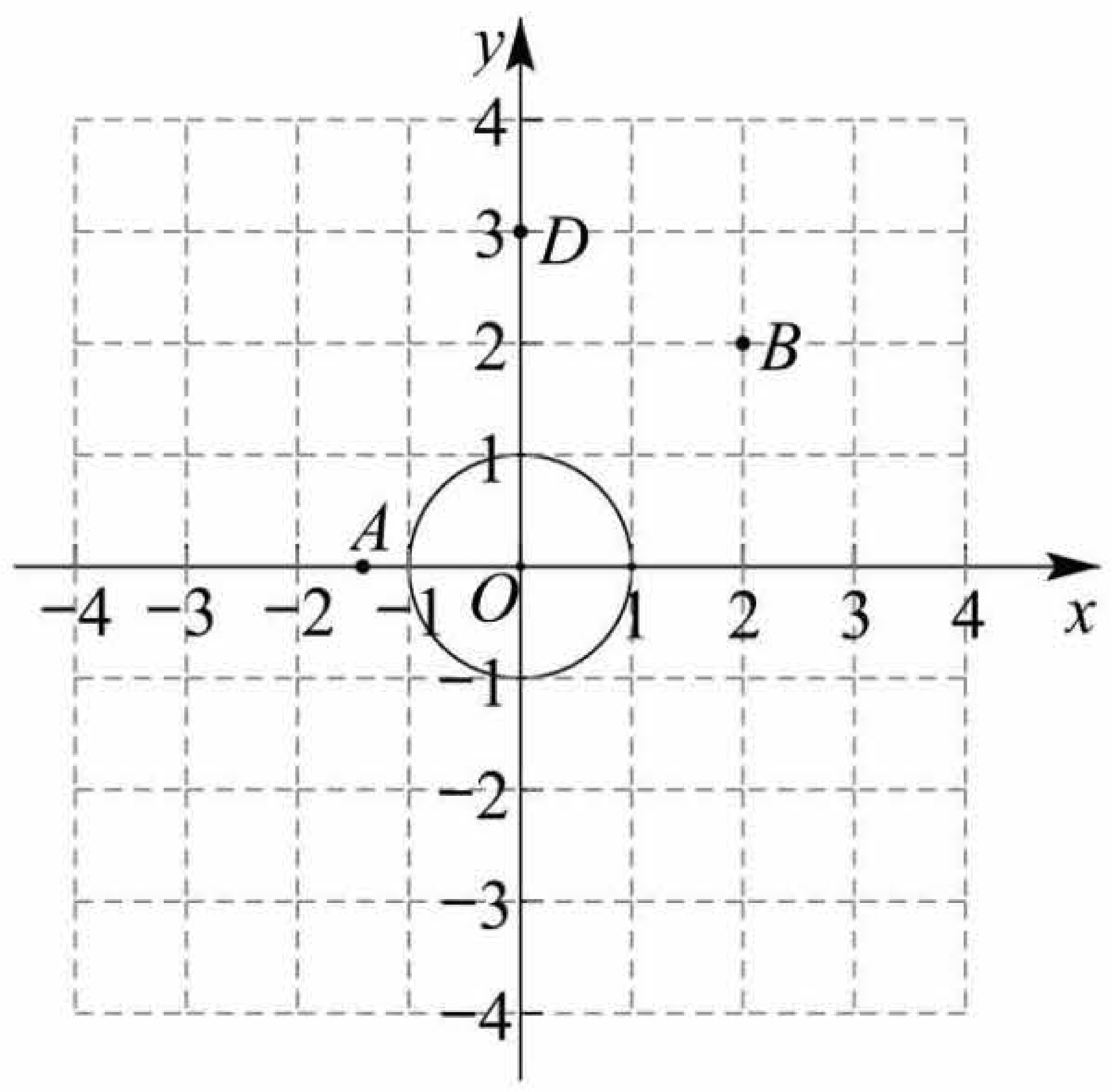
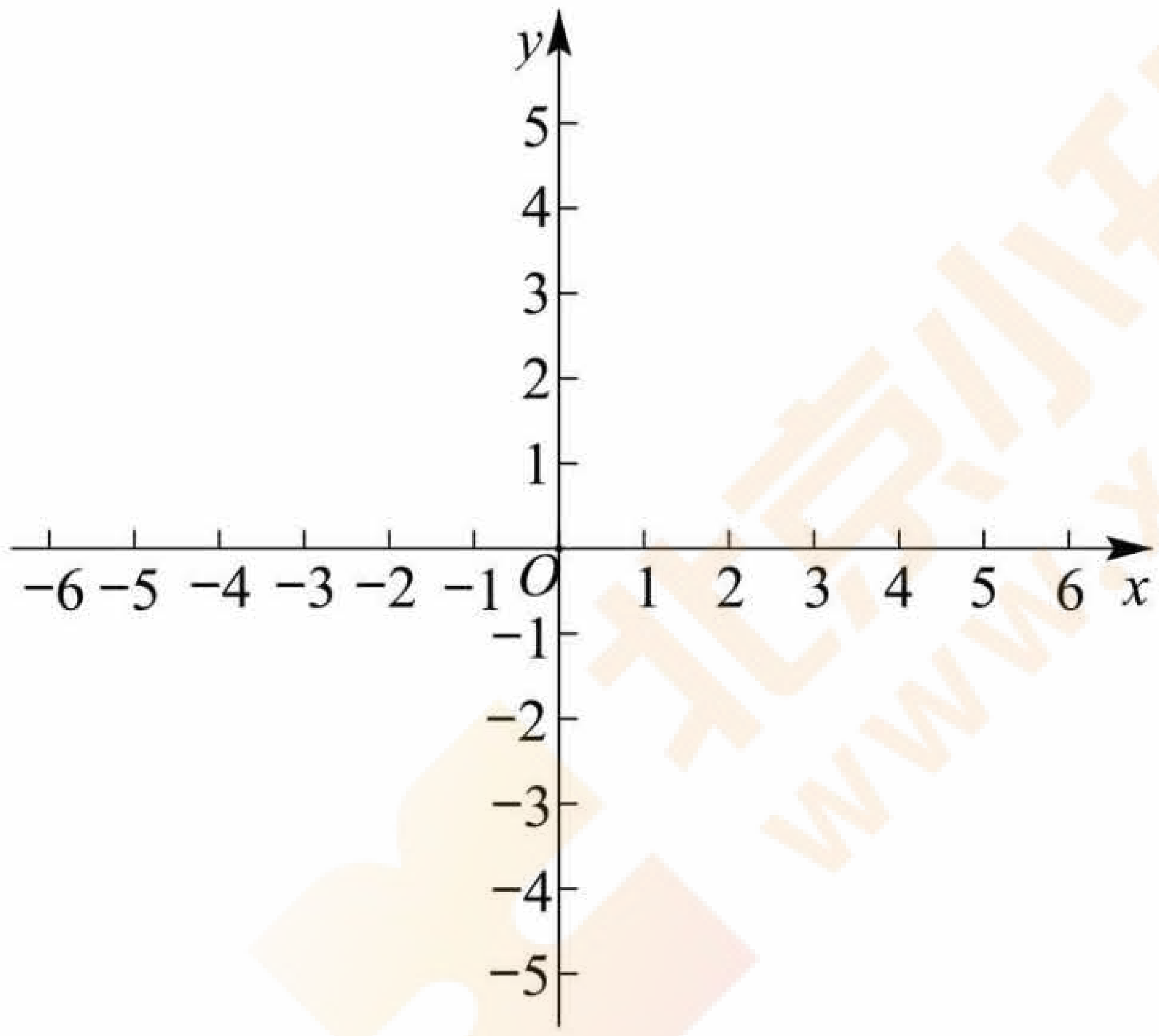


图 1



备用图

燕山地区 2023—2024 学年第一学期九年级期末考试

数学试卷答案及评分参考 　2024 年 1 月

阅卷须知：

1．为便于阅卷，本试卷答案中有关解答题的推导步骤写得较为详细，阅卷时，只要考生将主要过程正确写出即可。

2．若考生的解法与给出的解法不同，正确者可参照评分参考相应给分。

3．评分参考中所注分数，表示考生正确做到此步应得的累加分数。

第一部分　选择题

一、选择题（共 16 分，每题 2 分）

题号	1	2	3	4	5	6	7	8
选项	B	D	D	B	A	C	A	D

第二部分　非选择题

二、填空题（共 16 分，每题 2 分）

9．(4，–1)；　10．$x_1=1$，$x_2=3$；　11．$y=\frac{1}{2}(x+1)^2$；

12．答案不唯一，如：$y=(x-1)^2+3$；　13．3；　14．$4\sqrt{5}$；

15．24；　16．(1) $y=(-2x+180)(x-30)$，或 $y=-2x^2+240x-5400$；(2)1600．

三、解答题（共 68 分，第 17—19 题，每题 5 分，第 20 题 6 分，第 21—23 题，每题 5 分，第 24—26 题，每题 6 分，第 27—28 题，每题 7 分）

17．（本题满分 5 分）

解：方法一：

$\because a=1$，$b=4$，$c=-12$，　………………………… 1 分

$\therefore \Delta=b^2-4ac=4^2-4\times1\times(-12)=64$，　………………………… 2 分

$\therefore x_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{-4\pm\sqrt{64}}{2\times1}=\frac{-4\pm8}{2}$，　………………………… 3 分

$\therefore x_1=-6$，$x_2=2$．　………………………… 5 分

方法二：

移项，得　$x^2+4x=12$，　………………………… 1 分

配方，得　$x^2+4x+4=12+4$

$(x+2)^2=16$　…………………………2 分

由此可得　$x+2=\pm4$，　………………………… 3 分

$\therefore x_1=-6$，$x_2=2$．　………………………… 5 分

18．（本题满分 5 分）

解：原式$=3x^2-6x+x^2-2x+1$ ………………………………… 2 分

$=4x^2-8x+1$． ………………………………… 3 分

∵ $x^2-2x-5=0$，

∴ $x^2-2x=5$， ………………………………… 4 分

∴ $4x^2-8x=4(x^2-2x)=4\times5=20$，

∴原式$=20+1=21$． ………………………………… 5 分

19．（本题满分 5 分）

解：(1) 随机；$\frac{1}{3}$； ………………………………… 2 分

(2) 记小东和小北被分配到同一组为事件 M.

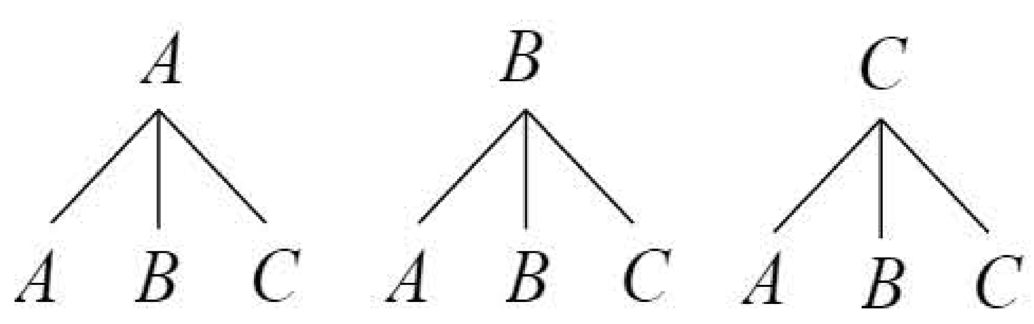
方法一：用列表法列举所有可能出现的结果：

	A	B	C
A	AA	AB	AC
B	BA	BB	BC
C	CA	CB	CC

由表中可以看出，所有可能的结果有 9 种，并且这 9 种结果出现的可能性相等，所有可能的结果中，满足事件 M 的结果有 3 种，即 AA，BB，CC，

∴$P(M)=\frac{3}{9}=\frac{1}{3}$． ………………………………… 5 分

方法二：根据题意可以画出如下的树状图：



由树状图可以看出，所有可能的结果有 9 种，并且这 9 种结果出现的可能性相等，所有可能的结果中，满足事件 M 的结果有 3 种，即 AA，BB，CC，

∴$P(M)=\frac{3}{9}=\frac{1}{3}$． ………………………………… 5 分

20．（本题满分 6 分）

解：(1) ∵将△ABC 绕点 B 逆时针旋转得到△DBE，点 C 的对应点 E 落在 AB 上，

∴$BD=BA$，$BE=BC$，

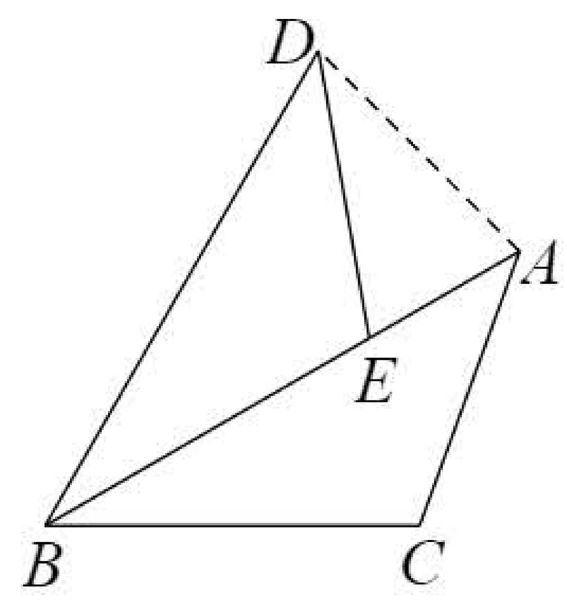
∴$AE=AB-BE=BD-BC=9-6=3$． ………………………………… 3 分

(2) ∵ $\angle C=110°$，$\angle BAC=40°$，

∴ $\angle ABC=180°-\angle C-\angle BAC=30°$，

∵将△ABC 绕点 B 逆时针旋转得到△DBE，

∴$BD=BA$，$\angle DBA=\angle ABC=30°$，



∴ $\angle BDA=\angle BAD=\dfrac{180^\circ-\angle DBA}{2}$

$=\dfrac{180^\circ-30^\circ}{2}=75°$. ………………………………… 6 分

21．（本题满分 6 分）

解：(1) 5，5，25，3； ………………………………… 4 分

(2) ①. ………………………………… 5 分

22．（本题满分 5 分）

解：(1) $\Delta=b^2-4ac=(-2)^2-4\times1\times(m-2)$

$=4-4m+8$

$=12-4m$.

∵方程有两个不相等的实数根，

∴ $\Delta>0$，即$12-4m>0$，

∴m 的取值范围是 $m<3$. ………………………………… 2 分

(2) ∵ $m<3$，且 m 为正整数，

∴$m=1$ 或 2. ………………………………… 3 分

方法一：

取 $m=2$，原方程化为$x^2-2x=0$，

解这个方程，得 $x_1=0$， $x_2=2$. ………………………………… 5 分

方法二：

取 $m=1$，原方程化为$x^2-2x-1=0$，

解这个方程，得 $x_1=1-\sqrt{2}$， $x_2=1+\sqrt{2}$. ……………………… 5 分

23．（本题满分 5 分）

解：(1) ∵二次函数 $y=ax^2+bx+3$ 的图象经过点 $A(1，0)$，$B(3，0)$.

∴ $\begin{cases}0=a+b+3,\\0=9a+3b+3,\end{cases}$

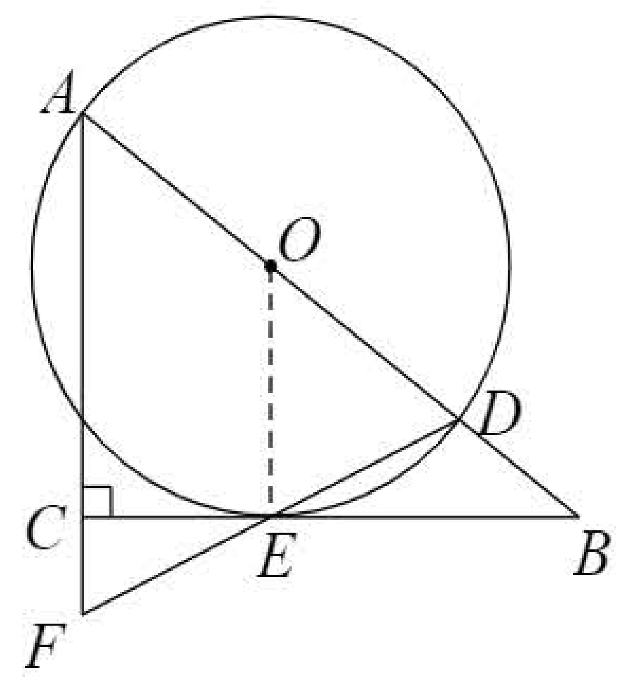
解这个方程组，得$\begin{cases}a=1,\\b=-4.\end{cases}$

∴该函数的解析式是 $y=x^2-4x+3$. ………………………………… 3 分

(2) $n\leqslant-3$. ………………………………… 5 分

24．（本题满分 6 分）

(1) 证明：如图，连接 OE.



∵BC 为⊙O 的切线，

∴$OE \perp BC$.

∵$\angle ACB=90°$，

∴$AF \perp BC$，

∴$OE // AF$，

∴$\angle F=\angle OED$.

∵$OE=OD$，

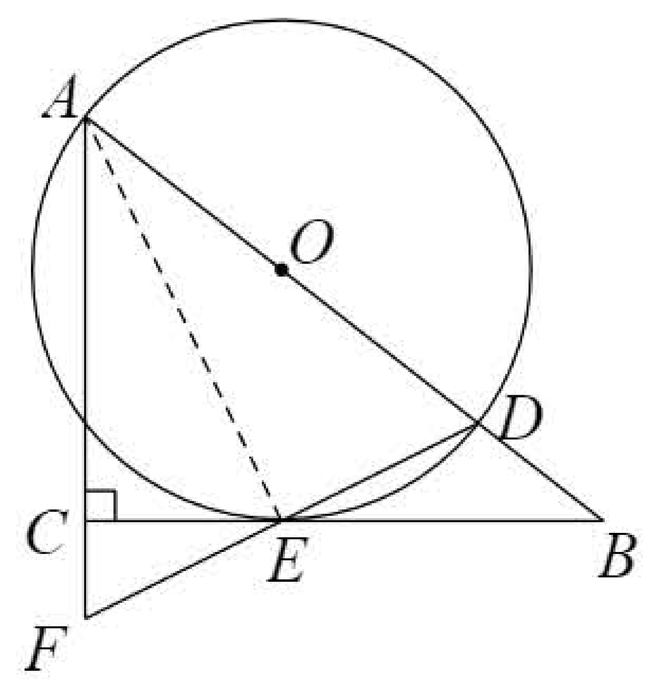
∴$\angle OED=\angle ODE$，

∴$\angle F=\angle ODE$，

∴$AF=AD$. ………………………………… 3 分

(2)解：方法一：

如图，连接 AE.



∵AD 为⊙O 直径，

∴$\angle AED=90°$，即 $AE \perp DF$ 于点 E，

又∵$EC \perp AF$，

∴$\triangle AEC \backsim \triangle EFC$，

∴$\dfrac{CE}{AC}=\dfrac{CF}{CE}$，

∴$AC=\dfrac{CE^2}{CF}=\dfrac{4^2}{2}=8$，

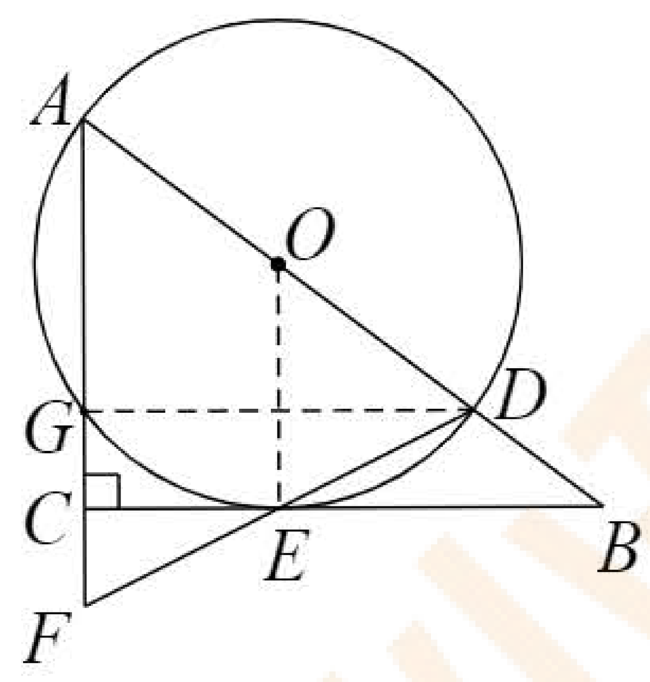
∴$AF=AC+CF=10$，

∴$AD=AF=10$，

∴⊙O 的半径为 5. ………………………………… 6 分

方法二：

如图，设 AF 与⊙O 相交于点 G，连接 DG.



由(1)得，$OE // AF$，

∵O 为 AD 中点，

∴E 为 DF 中点.

∵AD 为⊙O 直径，

∴$\angle AGD=90°$，即 $DG \perp AF$.

又∵$EC \perp AF$，

∴$CE // DG$，

∴CE 为$\triangle FGD$ 中位线，

∴$FG=2FC=4$，$DG=2CE=8$.

设⊙O 的半径为 r，

在 Rt$\triangle AGD$ 中，$\angle AGD=90°$，$AD=AF=2r$，$AG=AF-FG=2r-4$，$DG=8$，

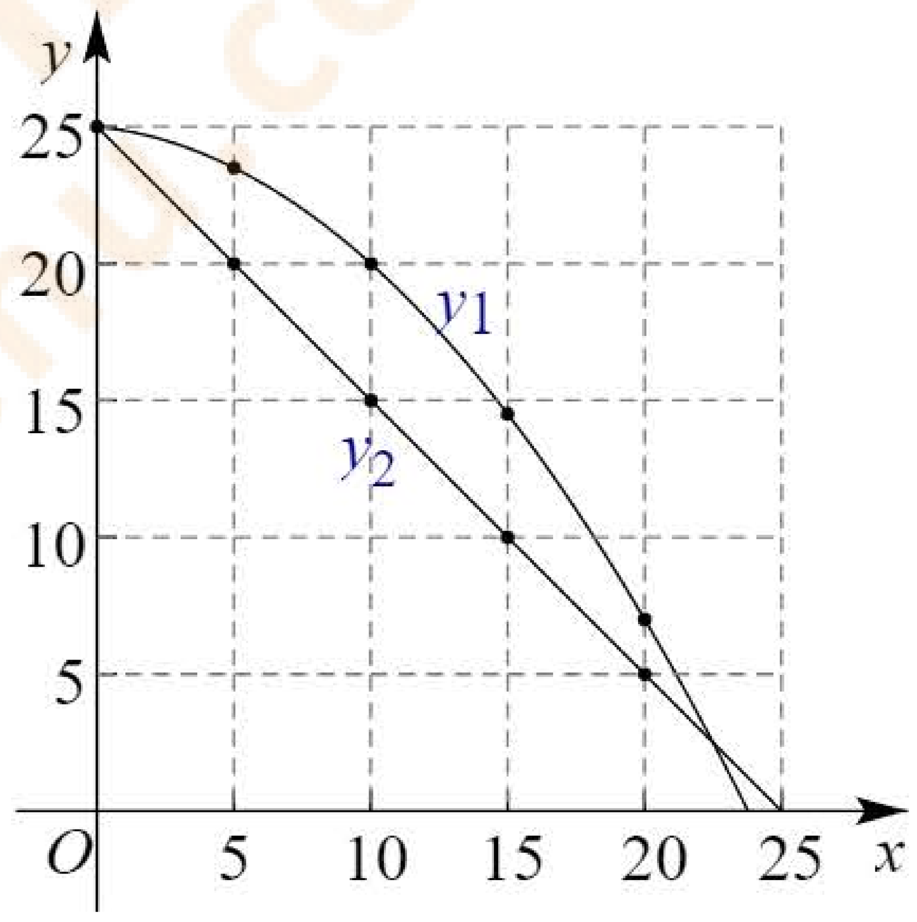
∴$(2r-4)^2+8^2=(2r)^2$，

解得 $r=5$，

∴⊙O 的半径为 5. ………………………………… 6 分

25．（本题满分 6 分）

解：(1)描点并画出函数 y_1，y_2 的图象如图；



………………………………… 2 分

(2) 场景 A：

将点(0，25)，(10，20)的坐标代入 $y_1=-0.04x^2+bx+c$，

得 $\begin{cases}25=c,\\20=-0.04\times10^2+10b+c,\end{cases}$

解得 $\begin{cases}b=-0.1,\\c=25.\end{cases}$

∴场景 A 满足的函数关系式为 $y_1=-0.04x^2-0.1x+25$.

场景 B：

将点(0，25)，(5，20)的坐标代入 $y_2=ax+c$，

得 $\begin{cases}25=c,\\20=5a+c,\end{cases}$

解得 $\begin{cases}a=-1,\\c=25.\end{cases}$

∴场景 B 满足的函数关系式为 $y_2=-x+25$. ……………………… 5 分

(3) ＞. ………………………………… 6 分

26．（本题满分 6 分）

解：(1) 方法一：

∵$m=n$，

∴点 $M(-1，m)$，$N(3，n)$关于直线 $x=t$ 对称，

∴$t=\dfrac{-1+3}{2}=1$，

即 $t=1$. ………………………………… 2 分

方法二：

∵点 $M(-1, m)$，$N(3, n)$在抛物线上，

∴ $\begin{cases} m = a - b + c, \\ n = 9a + 3b + c. \end{cases}$

∵ $m=n$，

∴ $a - b + c = 9a + 3b + c$，

∴ $b = -2a$，

∴ $t = -\dfrac{b}{2a} = 1$，

即 $t=1$. ………………………………… 2 分

(2) 方法一：

∵抛物线 $y = ax^2 + bx + c$ 的对称轴为 $x=t$，

∴ $t = -\dfrac{b}{2a}$，

∴ $b = -2at$，

∴抛物线解析式为 $y = ax^2 - 2atx + c$.

∵点 $M(-1, m)$，$N(3, n)$在抛物线上，

∴ $\begin{cases} m = a + 2at + c, \\ n = 9a - 6at + c. \end{cases}$

∵ $c<m<n$，

∴ $\begin{cases} c < a + 2at + c, \\ a + 2at + c < 9a - 6at + c, \end{cases}$

整理，得 $\begin{cases} a(1+2t) > 0, \\ 8a(1-t) > 0. \end{cases}$

∵ $a>0$，

∴ $\begin{cases} 1 + 2t > 0, \\ 1 - t > 0, \end{cases}$

解得 $-\dfrac{1}{2} < t < 1$，

∴ t 的取值范围是 $-\dfrac{1}{2} < t < 1$. ………………………………… 6 分

方法二：

∵ $a>0$，

∴抛物线 $y = ax^2 + bx + c$ 开口向上，

∴当 $x \leqslant t$ 时，y 随 x 增大而减小，当 $x \geqslant t$ 时，y 随 x 增大而增大.

设抛物线 $y=ax^2+bx+c$ 与 y 轴交于点 $C(0，c)$.

①若 $t\geqslant 3$，点 $M(-1，m)$，$C(0，c)$，$N(3，n)$都在对称轴左侧，

$\therefore m>c>n$，不合题意.

②若 $t\leqslant -1$，点 $M(-1，m)$，$C(0，c)$，$N(3，n)$都在对称轴右侧，

$\therefore m<c<n$，不合题意.

③若 $-1<t<3$，点 $M(-1，m)$，$N(3，n)$位于对称轴两侧，

做点 $M(-1，m)$关于 $x=t$ 的对称点 M'，则 $M'(2t+1，m)$位于对称轴右侧.

$\because m<n$，

$\therefore 2t+1<3$，

$\therefore t<1$.

i）若 $t\geqslant 0$，显然满足 $c<m$；

ii）若 $t<0$，点 $C(0，c)$，$M'(2t+1，m)$均位于对称轴右侧，

$\because c<m$，

$\therefore 0<2t+1$，

$\therefore t>-\dfrac{1}{2}$.

综上，t 的取值范围是 $-\dfrac{1}{2}<t<1$. ………………………………… 6 分

27. （本题满分 7 分）

(1)依题意补全图形，如图. ………………………………… 1 分

$\angle AEB=90°$. ………………………………… 2 分

证明：

$\because$将线段 AD 绕点 A 顺时针旋转 60° 得到线段 AE，

$\therefore AE=AD$，$\angle EAD=60°$.

$\because \triangle ABC$ 为等边三角形，

$\therefore AB=AC$，$\angle BAC=60°$，

$\therefore \angle EAD=\angle BAC$.

$\because \angle EAB=\angle EAD-\angle BAD$，

$\angle DAC=\angle BAC-\angle BAD$，

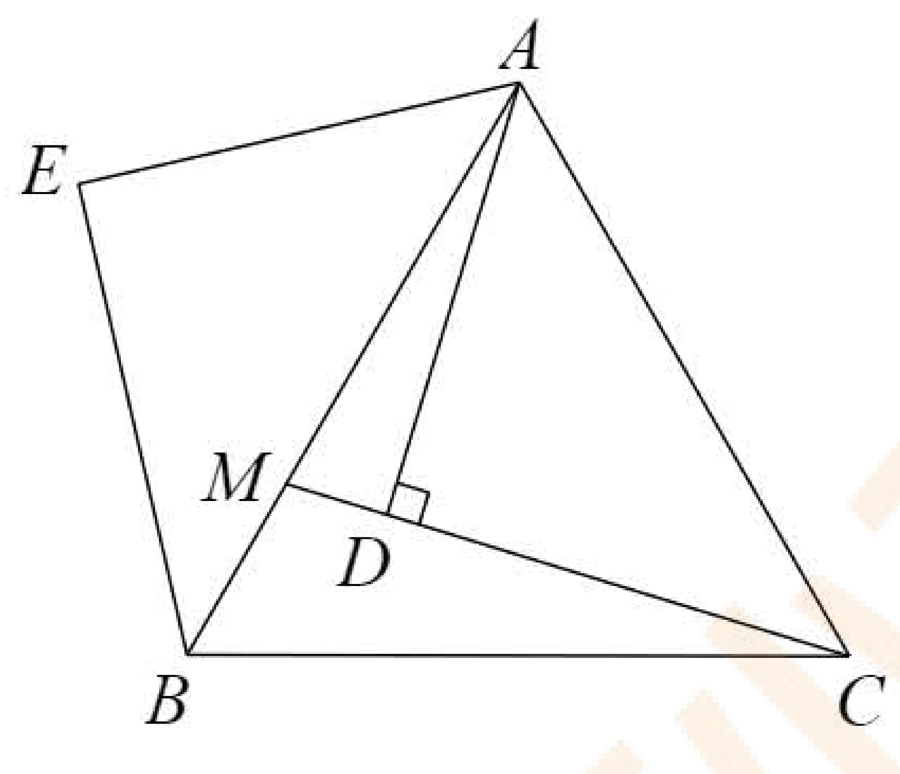
$\therefore \angle EAB=\angle DAC$，

$\therefore \triangle AEB\cong\triangle ADC$，

$\therefore \angle AEB=\angle ADC$.

$\because AD\perp CM$，即 $\angle ADC=90°$，

$\therefore \angle AEB=90°$. ………………………………… 3 分



(2) $BF=FC$. ………………………………… 4 分

证明：

如图，过点 B 作 $BG/\!/MC$，交 EF 的延长线于点 G.

∵线段 AD 绕点 A 顺时针旋转 60° 得到线段 AE，

∴$AE=AD$，$\angle EAD=60°$，

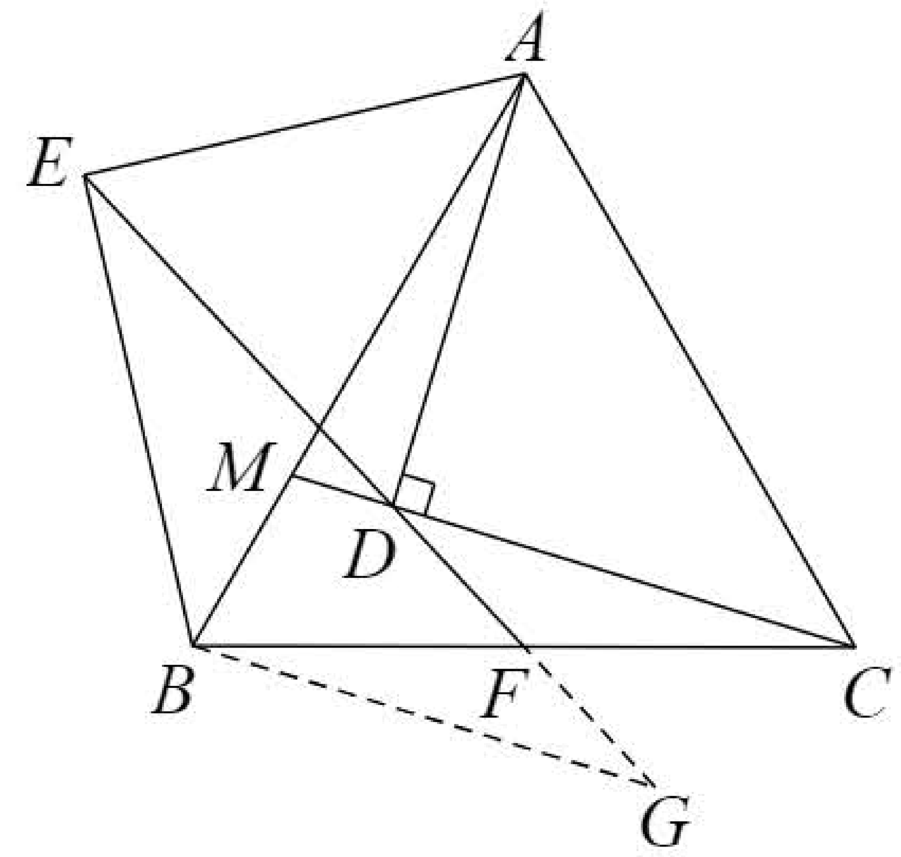
∴$\triangle ADE$ 为等边三角形，

∴$\angle ADE=\angle AED=60°$，

∵$\angle ADC=\angle AEB=90°$，

∴$\angle CDG=180°-\angle ADC-\angle ADE=30°$，

$\angle GEB=\angle AEB-\angle AED=30°$.



∵$BG/\!/MC$，

∴$\angle G=\angle CDG=30°$，

∴$\angle G=\angle GEB$，

∴$BE=BG$.

∵$\triangle AEB\cong\triangle ADC$，

∴$BE=CD$，

∴$BG=CD$.

在$\triangle BGF$ 和$\triangle CDF$ 中，

$\angle G=\angle CDG$，$\angle ABC=\angle ACB$，$BG=CD$，

∴$\triangle BGF\cong\triangle CDF$，

∴$BF=FC$. ………………………………… 7 分

28. （本题满分 7 分）

解：(1) ① A； ………………………………… 1 分

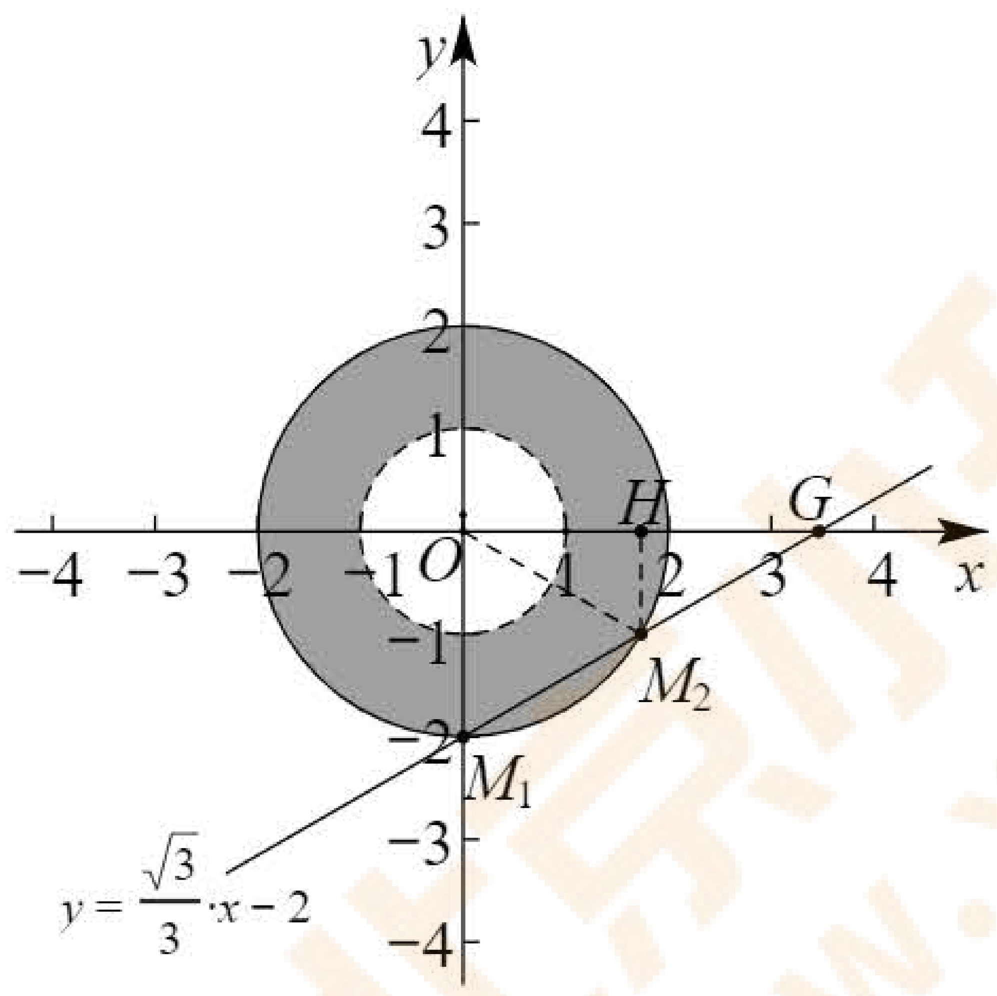
② 如图，设直线 $y=\dfrac{\sqrt{3}}{3}x-2$ 与 x 轴交于点 G，与以 O 为圆心，2 为半径的圆交于点 M_1，M_2，

∵点 M 是⊙O 的“关联点”，

∴$1<OM\leqslant 2$，即 M 点位于图中的阴影区域（含外圆，不含内圆）.

又∵点 M 在直线 $y=\dfrac{\sqrt{3}}{3}x-2$ 上，

∴点 M 在线段 M_1M_2 上.



当点 M 与 M_1 重合时，点 M 的坐标为$(0，-2)$；

当点 M 与 M_2 重合时，

$\because M_1(0，-2)$，$G(2\sqrt{3}，0)$，

$\therefore \angle OGM_1=30°$，$\angle OM_1G=60°$.

$\because OM_1=OM_2=2$，

$\therefore \triangle OM_1M_2$ 是等边三角形，

$\therefore \angle M_1OM_2=60°$，

$\therefore \angle M_2OG=30°=\angle OGM_2$，

$\therefore M_2O=M_2G$.

作 $M_2H\perp x$ 轴于点 H，则点 H 为 OG 中点，

$\therefore OH=\frac{1}{2}OG=\sqrt{3}$，$M_2H=\frac{1}{2}OM_1=1$，

$\therefore$ 点 M_2 的坐标为$(\sqrt{3}，-1)$.

综上，m 的取值范围是 $0\leqslant m\leqslant\sqrt{3}$. ································ 3 分

(2) $-3\leqslant t<1-\frac{4\sqrt{3}}{3}$，或 $3<t\leqslant\sqrt{13}$. ···································· 7 分