

2020 年北京市高考适应性测试

数 学 答 案

第一部分 (选择题 共 40 分)

一、选择题共 10 题, 每题 4 分, 共 40 分。在每题列出的四个选项中, 选出符合题目要求的一项。

1--5. BCCAA 6--10. DBCAD

10. D (见视频解读)

二、填空题共 5 题, 每题 5 分, 共 25 分。

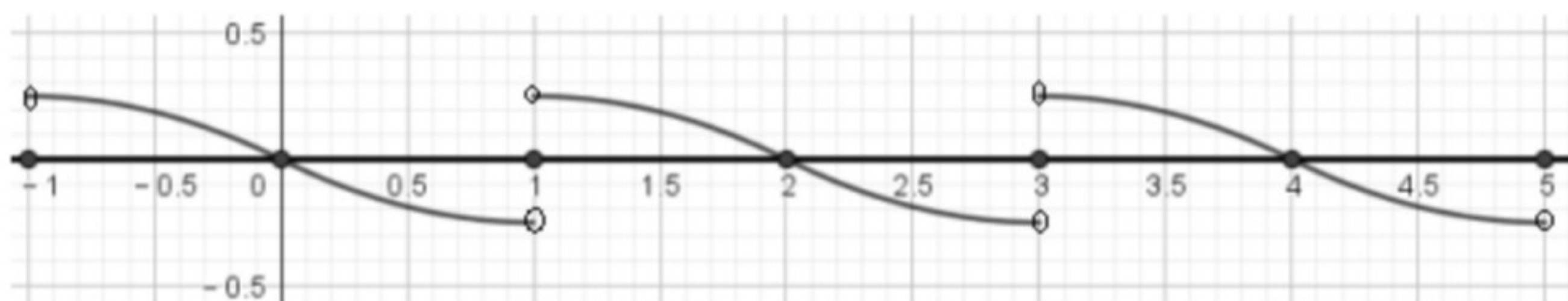
11. 1 12. -2 13. 1 14. $\frac{3}{4}, \frac{15\sqrt{7}}{4}$ 15. ①③ (见视频解读)

15. 解析.

因为函数 $g(x)$ 是定义域为 \mathbb{R} 的奇函数, 所以①正确;

由 $g(2-x)+g(x)=0$ 知函数 $y=g(x)$ 的图像关于点 $(1,0)$ 成中心对称,

由此作出函数 $g(x)$ 的图像如下, 由图像知函数 $y=g(x)$ 在 $(-1,5)$ 内有 5 个零点, 故②错误;



对于③, 方法一是利用 $f(-x)$ 与 $f(x)$ 关于 y 轴对称, 由图像知③正确。

方法二是利用函数 $y=f(x)$ 的图像, 直接解不等式 $0 < -x < 1$, 即得 $-1 < x < 0$ 。故而正确。

注: 15 题给出的结论中, 有多个符合题目要求. 全部选对得 5 分, 不选或有错选得 0 分, 其他得 3 分。

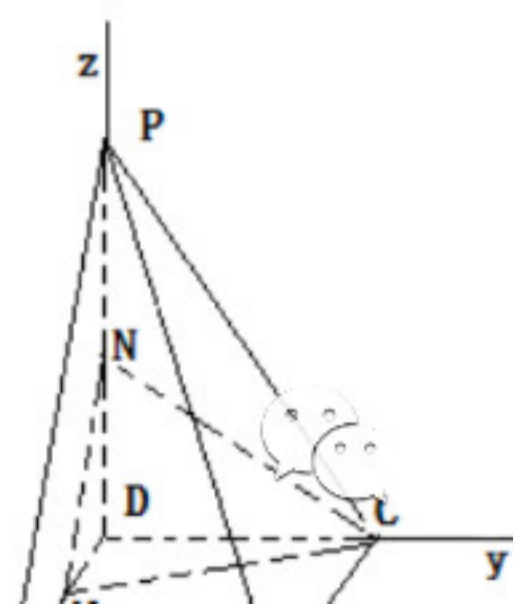
三、解答题共 6 题, 共 85 分, 解答应写出文字说明, 演算步骤或证明过程。

16. (本小题 14 分)

(I) 证明:

因为 M, N 分别为 AD, PD 的中点

所以 $PA \parallel MN$,



又因 $PA \not\subset$ 平面 MNC
 $MN \subset$ 平面 MNC

所以 $PA //$ 平面 MNC ;

(II) 由题意建立如图所示的空间直角坐标系 $D-xyz$ 。

设 $AD=2$, 则 $P(0,0,4), B(2,2,0), M(1,0,0), N(0,0,2), C(0,2,0)$

则 $\overrightarrow{PB} = (2, 2, -4), \overrightarrow{MN} = (-1, 0, 2), \overrightarrow{MC} = (-1, 2, 0)$

设平面 MNC 的法向量为 $\vec{n} = (x, y, z)$,

$$\text{则 } \begin{cases} \vec{n} \cdot \overrightarrow{MN} = -x + 2z = 0 \\ \vec{n} \cdot \overrightarrow{MC} = -x + 2y = 0 \end{cases}, \text{ 令 } x = 2, \text{ 则 } y = 1, z = 1, \text{ 即 } \vec{n} = (2, 1, 1)$$

$$\text{设直线 } PB \text{ 与平面 } MNC \text{ 所成角为 } \alpha, \text{ 则 } \sin \alpha = \frac{|\vec{n} \cdot \overrightarrow{PB}|}{|\vec{n}| \cdot |\overrightarrow{PB}|} = \frac{4 + 2 - 4}{\sqrt{6} \cdot 2\sqrt{6}} = \frac{1}{6}$$

即直线 PB 与平面 MNC 所成角的正弦值为 $\frac{1}{6}$ 。

17. (本小题 14 分)

答案: 当 $q=2$ 时, 存在, $k_{\min} = 10$ 。

当 $q = \frac{1}{2}$ 时, 不存在。

当 $q = -2$ 时, 存在, $k_{\min} = 11$ 。

理由分别如下。

$$\text{当 } q = 2 \text{ 时, } a_1 = 3, a_n = 3 \cdot 2^{n-1}, S_n = \frac{3 - 3 \cdot 2^n}{1 - 2} = 3 \cdot 2^n - 3。$$

$$\text{由 } 3 \cdot 2^k - 3 > 2020 \text{ 得 } 2^k > 674 \frac{1}{3},$$

$$\therefore 2^9 = 512, 2^{10} = 1024, k \in N_+, k_{\min} = 10$$

$$\text{当 } q = \frac{1}{2} \text{ 时, } a_1 = 48, a_n = 48 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}, S_n = \frac{48 - 48 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^n}{1 - \frac{1}{2}} = 96 - 96 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^n。$$

由 $96 - 96 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^k > 2020$ 得 $-\frac{481}{24} > \left(\frac{1}{2}\right)^k$, 不等式无解。此时不存在。

当 $q = -2$ 时, $a_1 = 3, a_n = 3 \cdot (-2)^{n-1}, S_n = \frac{3 - 3 \cdot (-2)^n}{1 - (-2)} = 1 - (-2)^n$ 。

由 $1 - (-2)^k > 2020$ 得 $(-2)^k < -2019$,

$\therefore (-2)^9 = -512, (-2)^{10} = 1024, (-2)^{11} = -2048, k \in N_+, k_{\min} = 11$

18. (本小题 14 分)

解: (1) 设“丙的高度小于 15 厘米”为事件 M

因为丙的高度小于 15 厘米的有 13 厘米、14 厘米的两株, 所以 $P(M) = \frac{2}{7}$ 。

即丙的高度小于 15 厘米的概率为 $\frac{2}{7}$ 。

(2) 设“甲的高度大于乙的高度”为事件 N.

记 A 组 7 株植物依次分别为 $A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6, A_7$ 。

B 组 7 株植物依次分别为 $B_1, B_2, B_3, B_4, B_5, B_6, B_7$ 。

从 A 中选出甲, 从 B 中选出乙共有 $7 \times 7 = 49$ 种情况,

其中满足甲的高度大于乙的高度的有:

$(A_4, B_1), (A_5, B_1), (A_5, B_2), (A_6, B_1), (A_6, B_2), (A_6, B_3), (A_7, B_1), (A_7, B_2), (A_7, B_3), (A_7, B_4)$ 。

共 10 种。

所以 $P(N) = \frac{10}{49}$ 。

即甲的高度大于乙的高度的概率为 $\frac{10}{49}$

(3) $\mu_0 < \mu_1$ 。

19. (本小题 15 分) (见视频解读)

解: (1) $f(x)$ 定义域为: \mathbf{R}

$$f'(x) = e^x(x-1) + e^x - e^a x = x(e^x - e^a)$$

$$\because f(0) = -1$$

\therefore 切点为 $(0, -1)$

$$\because f'(0) = 0$$

$\therefore y = f(x)$ 在 $(0, -1)$ 处的切线方程为: $y = -1$.

(2) 令 $f'(x) = 0$, 解得: $x_1 = 0, x_2 = a$ ($a < 0$)

x	$(-\infty, a)$	a	$(a, 0)$	0	$(0, +\infty)$
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$	↑		↓		↑

$\therefore f(x)$ 在 $(-\infty, a)$ 、 $(0, +\infty)$ 单调递增, 在 $(a, 0)$ 单调递减.

$\therefore f(x)$ 在 $x = 0$ 处取得极小值为 $f(0) = -1$.

(3) 由 (2) 知 $f(x)$ 的极大值为 $f(a) = e^a(a-1) - \frac{1}{2}e^a a^2 = (a-1 - \frac{1}{2}a^2)e^a < 0, (a < 0)$

$$f(0) = -1 < 0, \quad f(2) = e^2 - 2e^a,$$

$$\because a < 0, \quad \therefore 0 < e^a < 1, \quad \therefore f(2) > 0$$

\therefore 函数 $f(x)$ 的零点个数为 1.

20. (本小题 14 分) (见视频讲解)

解答: (I) 由题意知 $c = \sqrt{3}$, $\because a > c$, \therefore 只能 $b = 1$, 且焦点在 x 轴上, $a^2 = b^2 + c^2 = 4$

所以椭圆 C 的方程为: $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$.

(II) 由题意可设 $M(-x_0, m), N(x_0, m)$, $-1 < m < 1$. 则 $x_0^2 = 4(1-m^2)$ ---①

因为点 D 为直线 AN 上一点, 所以 $\overrightarrow{AD} = \lambda \overrightarrow{AN} = \lambda(x_0, m-1)$,

所以 $\overrightarrow{OD} = \lambda \overrightarrow{AN} + \overrightarrow{OA} = (\lambda x_0, \lambda(m-1) + 1)$

$$\text{所以 } K_{BD} \cdot K_{BM} = \frac{\lambda(m-1)+2}{\lambda x_0} \cdot \frac{m+1}{-x_0} = -\frac{1}{4}$$

$$\text{整理得 } 4\lambda(m^2-1)+8(m+1) = \lambda x_0^2$$

$$\text{将①代入整理得 } (m+1)[\lambda(m-1)+1] = 0,$$

$$\because m+1 \neq 0, \therefore \lambda(m-1)+1=0, \text{ 即 } y_D = 0$$

所以点 D 在 x 轴上。

21. (本小题 14 分) (见视频解读)

设数阵 $A_0 = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$, 其中 $a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22} \in \{1, 2, \dots, 6\}$, 设 $S = \{e_1, e_2, \dots, e_l\} \subseteq \{1, 2, \dots, 6\}$, 其中

$e_1 < e_2 < \dots < e_l, l \in \mathbb{N}^*$ 且 $l \leq 6$. 定义变换 φ_k 为“对于数阵的每一行, 若其中有 k 或 $-k$, 则这一行中所有数均保持不变” ($\varphi_k(A_0)$ 表示“将 A_0 经过 φ_{e_1} 变换得到 A_1 , 再将 A_1 经过 φ_{e_2} 变换得到 A_2 , …, 以此类推, 最后将 A_{l-1} 经过 φ_{e_l} 变换得到 A_l ”, 记数阵 A_l 中四个数的和为 $T_s(A_0)$).

(I) 若 $A_0 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}$, 写出 A_0 经过 φ_2 变换后得到的数阵 A_1 ;

(II) 若 $A_0 = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$, $S = \{1, 3\}$, 求 $T_s(A_0)$ 的值;

(III) 对任意确定的一个矩阵 A_0 , 证明: $T_s(A_0)$ 的所有可能取值的和不超过 -4.

解 (I) 经过 φ_2 变换 $A_1 = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}$

(II) $A_0 = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$ 经过 φ_1 变换得到 $A_1 = \begin{pmatrix} -1 & -3 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$ 经过 φ_3 变换得到

$$A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & -6 \end{pmatrix}$$

所以 $T_S(A_0) = 1 + 3 + (-3) + (-6) = -5$

(III) 因为集合 S 共有含空集在内的子集 64 个, 令 $\varphi_\phi(A_0) = A_0$, 对于第一行 a_{11} 和 a_{12}

①若 $a_{11} = a_{12}$, 则含 a_{11} 的子集有 32 个, 这 32 个 A_i 中第一行为 $-a_{11}, -a_{12}$; 不含有 a_{11} 的子集有 32 个, 这 32 个 A_i 中第一行为 a_{11}, a_{12} , 所有 A_i 中第一行的和为 0。

①若 $a_{11} \neq a_{12}$, 则含 a_{11} 且 a_{12} 的子集有 16 个, 不含有 a_{11} 且不含 a_{12} 的子集有 16 个, 这 32 个 A_i 中第一行为 a_{11}, a_{12} ; 不含有 a_{11} 含 a_{12} 的子集有 16 个, 含有 a_{11} 不含 a_{12} 的子集有 16 个, 这 32 个 A_i 中第一行为 $-a_{11}, -a_{12}$; 所有 A_i 中第一行的和为 0。

同理, 所有 A_i 中第二行的和为 0。即 $\sum_{U \subseteq S} T_U(A_0) = 0$

但是 $\varphi_\phi(A_0) = A_0$, 所以 $\sum_{S \neq \phi} T_S(A_0) = 0 - T_\phi(A_0) = -(a_{11} + a_{12} + a_{21} + a_{22}) \leq -4$