

北京市朝阳区高三年级第一次综合练习

数学(理)

2019.3

本试卷共4页,150分。考试时长120分钟。考生务必将答案答在答题卡上,在试卷上作答无效。考试结束后,将本试卷和答题卡一并交回。

第一部分(选择题 共40分)

一、选择题共8小题,每小题5分,共40分。在每小题列出的四个选项中,选出符合题目要求的一项。

1. 已知集合 $A = \{x | x > 1\}$, 集合 $B = \{x | x^2 < 4\}$, 则 $A \cap B =$

- A. $\{x | x > -2\}$ B. $\{x | 1 < x < 2\}$ C. $\{x | 1 \leq x < 2\}$ D. \mathbf{R}

2. 在复平面内,复数 $z = \frac{1+2i}{i}$ 对应的点位于

- A. 第一象限 B. 第二象限 C. 第三象限 D. 第四象限

3. $(\frac{1}{x} - x)^4$ 的展开式中的常数项为

- A. -12 B. -6 C. 6 D. 12

4. 若函数 $f(x) = \begin{cases} 2^x, & x < 1, \\ -\log_2 x, & x \geq 1, \end{cases}$ 则函数 $f(x)$ 的值域是

- A. $(-\infty, 2)$ B. $(-\infty, 2]$ C. $[0, +\infty)$ D. $(-\infty, 0) \cup (0, 2)$

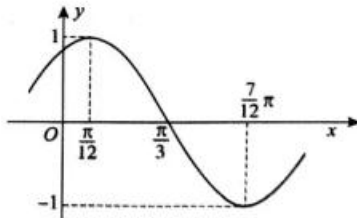
5. 如图,函数 $f(x)$ 的图象是由正弦曲线或余弦曲线经过变换得到的,则 $f(x)$ 的解析式可以是

A. $f(x) = \sin(2x + \frac{\pi}{3})$

B. $f(x) = \sin(4x + \frac{\pi}{6})$

C. $f(x) = \cos(2x + \frac{\pi}{3})$

D. $f(x) = \cos(4x + \frac{\pi}{6})$



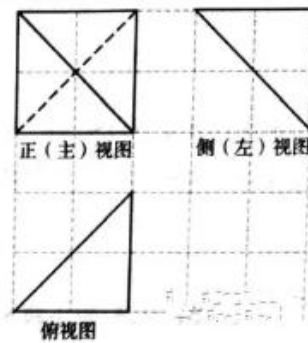
第5题图.....

6. 记不等式组 $\begin{cases} y \geq 0, \\ y \leq x + 3, \\ y \leq kx \end{cases}$ 所表示的平面区域为 D . “点 $(-1, 1) \in D$ ” 是 “ $k \leq -1$ ” 的

- A. 充分而不必要条件 B. 必要而不充分条件
C. 充分必要条件 D. 既不充分也不必要条件

7. 某三棱锥的三视图如图所示(网格纸上小正方形的边长为1),则该三棱锥的体积为

- A. 4
- B. 2
- C. $\frac{8}{3}$
- D. $\frac{4}{3}$



8. 某单位周一、周二、周三开车上班的职工人数分别是 14,10,8. 若这三天中至少有一天开车上班的职工人数是 20,则这三天都开车上班的职工人数至多是

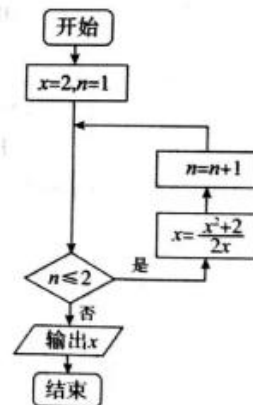
- A. 5
- B. 6
- C. 7
- D. 8

第二部分(非选择题 共 110 分)

二、填空题共 6 小题,每小题 5 分,共 30 分.

9. 双曲线 $\frac{x^2}{4} - y^2 = 1$ 的右焦点到其一条渐近线的距离是_____.

10. 执行如图所示的程序框图,输出的 x 值为_____.



11. 在极坐标系中,直线 $\rho \cos \theta = 1$ 与圆 $\rho = 4 \cos \theta$ 交于 A, B 两点,则 $|AB| =$ _____.

12. 能说明“函数 $f(x)$ 的图象在区间 $[0, 2]$ 上是一条连续不断的曲线,若 $f(0) \cdot f(2) > 0$,则 $f(x)$ 在 $(0, 2)$ 内无零点”为假命题的一个函数是_____.

13. 天坛公园是明、清两代皇帝“祭天”“祈谷”的场所. 天坛公园中的圜丘台共有三层(如下页本题图 1 所示),上层坛的中心是一块呈圆形的大理石板,从中心向外围以扇面形石铺成(如下页本题图 2 所示). 上层坛从第一环至第九环共有九环,中层坛从第十环至第十八环共有九环,下层坛从第十九环至第二十七环共有九环;第一环的扇面形石有 9 块,从第二环起,每环的扇面形石块数比前一环多 9 块,则第二十七环的扇面形石块数是_____;上、中、下三层坛所有的扇面形石块数是_____.



第 13 题图 1



第 13 题图 2

14. 在平面内, 点 A 是定点, 动点 B, C 满足 $|\vec{AB}| = |\vec{AC}| = 1, \vec{AB} \cdot \vec{AC} = 0$, 则集合 $\{P | \vec{AP} = \lambda \vec{AB} + \vec{AC}, 1 \leq \lambda \leq 2\}$ 所表示的区域的面积是_____.

三、解答题共 6 小题, 共 80 分. 解答应写出文字说明, 演算步骤或证明过程.

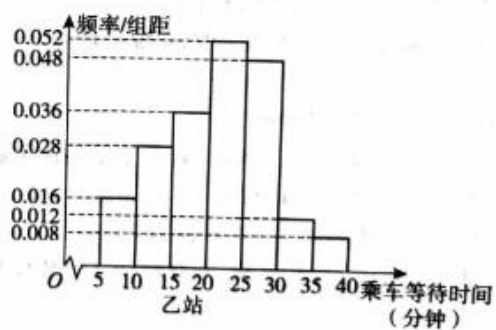
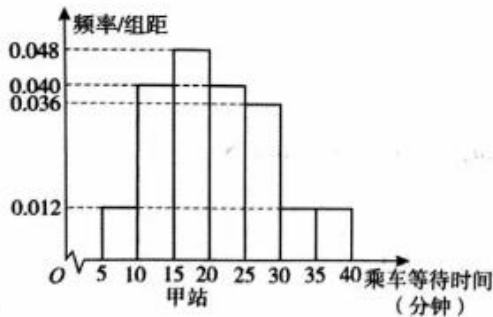
15. (本小题满分 13 分)

在 $\triangle ABC$ 中, $a = \sqrt{21}, \angle A = 120^\circ, \triangle ABC$ 的面积等于 $\sqrt{3}$, 且 $b < c$.

- (I) 求 b 的值;
(II) 求 $\cos 2B$ 的值.

16. (本小题满分 13 分)

某部门在同一上班高峰时段对甲、乙两座地铁站各随机抽取了 50 名乘客, 统计其乘车等待时间(指乘客从进站口到乘上车的时间, 乘车等待时间不超过 40 分钟). 将统计数据按 $[5, 10), [10, 15), [15, 20), \dots, [35, 40]$ 分组, 制成频率分布直方图:



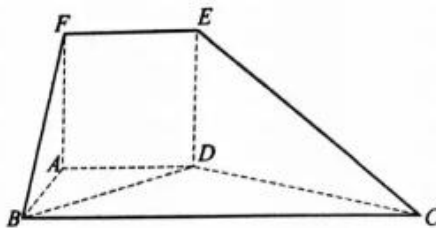
假设乘客乘车等待时间相互独立.

- (I) 在上班高峰时段, 从甲站的乘客中随机抽取 1 人, 记为 A ; 从乙站的乘客中随机抽取 1 人, 记为 B . 用频率估计概率, 求“乘客 A, B 乘车等待时间都小于 20 分钟”的概率;
(II) 在上班高峰时段, 从乙站乘车的乘客中随机抽取 3 人, X 表示乘车等待时间小于 20 分钟的人数, 用频率估计概率, 求随机变量 X 的分布列与数学期望.

17. (本小题满分 14 分)

如图,在多面体 $ABCDEF$ 中,平面 $ADEF \perp$ 平面 $ABCD$. 四边形 $ADEF$ 为正方形,四边形 $ABCD$ 为梯形,且 $AD \parallel BC, \angle BAD = 90^\circ, AB = AD = 1, BC = 3$.

- (I) 求证: $AF \perp CD$;
- (II) 求直线 BF 与平面 CDE 所成角的正弦值;
- (III) 线段 BD 上是否存在点 M , 使得直线 $CE \parallel$ 平面 AFM ? 若存在, 求 $\frac{BM}{BD}$ 的值; 若不存在, 请说明理由.



18. (本小题满分 13 分)

已知函数 $f(x) = \frac{\ln(ax)}{x}$ ($a \in \mathbf{R}$ 且 $a \neq 0$).

- (I) 当 $a = 1$ 时, 求曲线 $y = f(x)$ 在点 $(1, f(1))$ 处的切线方程;
- (II) 当 $a = -1$ 时, 求证: $f(x) \geq x + 1$;
- (III) 讨论函数 $f(x)$ 的极值.

19. (本小题满分 14 分)

已知点 $M(x_0, y_0)$ 为椭圆 $C: \frac{x^2}{2} + y^2 = 1$ 上任意一点, 直线 $l: x_0x + 2y_0y = 2$ 与圆 $(x - 1)^2 + y^2 = 6$ 交于 A, B 两点, 点 F 为椭圆 C 的左焦点.

- (I) 求椭圆 C 的离心率及左焦点 F 的坐标;
- (II) 求证: 直线 l 与椭圆 C 相切;
- (III) 判断 $\angle AFB$ 是否为定值, 并说明理由.

20. (本小题满分 13 分)

在无穷数列 $\{a_n\}$ 中, a_1, a_2 是给定的正整数, $a_{n+2} = |a_{n+1} - a_n|, n \in \mathbf{N}^*$.

- (I) 若 $a_1 = 3, a_2 = 1$, 写出 a_9, a_{10}, a_{100} 的值;
- (II) 证明: 数列 $\{a_n\}$ 中存在值为 0 的项;
- (III) 证明: 若 a_1, a_2 互质, 则数列 $\{a_n\}$ 中必有无穷多项为 1.

北京市朝阳区高三年级第一次综合练习

数学(理)参考答案

2019.3

一、选择题:(本题满分40分)

题号	1	2	3	4	5	6	7	8
答案	B	D	C	A	A	C	D	B

二、填空题:(本题满分30分)

题号	9	10	11	12	13	14
答案	1	$\frac{17}{12}$	$2\sqrt{3}$	$y = (x-1)^2$ (答案不唯一)	243	3π

三、解答题:(本题满分80分)

15. (本小题满分13分)

解:(I)由已知得
$$\begin{cases} S = \frac{1}{2}bc\sin A = \sqrt{3}, \\ (\sqrt{21})^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos 120^\circ. \end{cases}$$

整理得
$$\begin{cases} bc = 4, \\ b^2 + c^2 = 17. \end{cases}$$

解得
$$\begin{cases} b = 1, \\ c = 4, \end{cases} \text{ 或 } \begin{cases} b = 4, \\ c = 1. \end{cases}$$

因为 $b < c$, 所以 $b = 1$ 8分

(II)由正弦定理 $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B}$,

即 $\sin B = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\sqrt{21}} = \frac{\sqrt{7}}{14}$.

所以 $\cos 2B = 1 - 2\sin^2 B = 1 - 2 \times \left(\frac{\sqrt{7}}{14}\right)^2 = \frac{13}{14}$ 13分

16. (本小题满分13分)

解:(I)设 M 表示事件“乘客 A 乘车等待时间小于 20 分钟”, N 表示事件“乘客 B 乘车等待时间小于 20 分钟”, C 表示事件“乘客 A, B 乘车等待时间都小于 20 分钟”.

由题意知, 乘客 A 乘车等待时间小于 20 分钟的频率为 $(0.012 + 0.040 + 0.048) \times 5 = 0.5$, 故 $P(M)$ 的估计值为 0.5.

乘客 B 乘车等待时间小于 20 分钟的频率为
 $(0.016 + 0.028 + 0.036) \times 5 = 0.4$, 故 $P(N)$ 的估计值为 0.4.

又 $P(C) = P(MN) = P(M) \cdot P(N) = \frac{1}{2} \times \frac{2}{5} = \frac{1}{5}$.

故事件 C 的概率为 $\frac{1}{5}$ 6 分

(II) 由 (I) 知, 乙站乘客乘车等待时间小于 20 分钟的频率为 0.4,

所以乙站乘客乘车等待时间小于 20 分钟的概率为 $\frac{2}{5}$.

显然, X 的可能取值为 0, 1, 2, 3, 且 $X \sim B(3, \frac{2}{5})$.

所以 $P(X=0) = C_3^0 \left(\frac{3}{5}\right)^3 = \frac{27}{125}$; $P(X=1) = C_3^1 \frac{2}{5} \cdot \left(\frac{3}{5}\right)^2 = \frac{54}{125}$;

$P(X=2) = C_3^2 \left(\frac{2}{5}\right)^2 \cdot \frac{3}{5} = \frac{36}{125}$; $P(X=3) = C_3^3 \left(\frac{2}{5}\right)^3 = \frac{8}{125}$.

故随机变量 X 的分布列为

X	0	1	2	3
P	$\frac{27}{125}$	$\frac{54}{125}$	$\frac{36}{125}$	$\frac{8}{125}$

$EX = 3 \times \frac{2}{5} = \frac{6}{5}$ 13 分

17. (本小题满分 14 分)

解: (I) 证明: 因为 $ADEF$ 为正方形,

所以 $AF \perp AD$.

又因为平面 $ADEF \perp$ 平面 $ABCD$,

且平面 $ADEF \cap$ 平面 $ABCD = AD$,

所以 $AF \perp$ 平面 $ABCD$.

所以 $AF \perp CD$ 4 分

(II) 由 (I) 可知, $AF \perp$ 平面 $ABCD$, 所以 $AF \perp AD, AF \perp AB$.

因为 $\angle BAD = 90^\circ$, 所以 AB, AD, AF 两两垂直.

分别以 AB, AD, AF 为 x 轴, y 轴, z 轴建立空间直角坐标系 (如图).

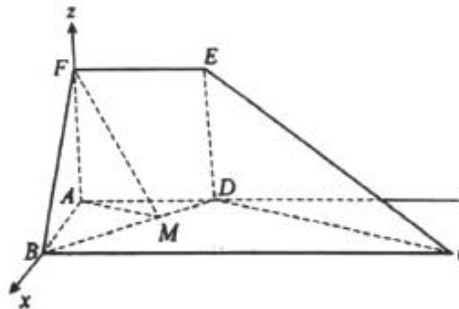
因为 $AB = AD = 1, BC = 3$,

所以 $A(0, 0, 0), B(1, 0, 0), C(1, 3, 0)$,

$D(0, 1, 0), E(0, 1, 1), F(0, 0, 1)$,

所以 $\overrightarrow{BF} = (-1, 0, 1), \overrightarrow{DC} = (1, 2, 0)$,

$\overrightarrow{DE} = (0, 0, 1)$.



设平面 CDE 的一个法向量为 $n = (x, y, z)$,

$$\begin{cases} n \cdot \overrightarrow{DC} = 0, \\ n \cdot \overrightarrow{DE} = 0. \end{cases} \text{ 即 } \begin{cases} x + 2y = 0, \\ z = 0. \end{cases}$$

令 $x = 2$, 则 $y = -1$,

所以 $n = (2, -1, 0)$.

设直线 BF 与平面 CDE 所成角为 θ ,

$$\text{则 } \sin\theta = |\cos\langle n, \overrightarrow{BF} \rangle| = \frac{|2 \times (-1)|}{\sqrt{5} \times \sqrt{2}} = \frac{\sqrt{10}}{5}. \dots\dots\dots 9 \text{ 分}$$

(III) 设 $\frac{BM}{BD} = \lambda (\lambda \in [0, 1])$,

设 $M(x_1, y_1, z_1)$, 则 $(x_1 - 1, y_1, z_1) = \lambda(-1, 1, 0)$,

所以 $x_1 = 1 - \lambda, y_1 = \lambda, z_1 = 0$, 所以 $M(1 - \lambda, \lambda, 0)$.

所以 $\overrightarrow{AM} = (1 - \lambda, \lambda, 0)$.

设平面 AFM 的一个法向量为 $m = (x_0, y_0, z_0)$,

$$\begin{cases} m \cdot \overrightarrow{AM} = 0, \\ m \cdot \overrightarrow{AF} = 0. \end{cases}$$

因为 $\overrightarrow{AF} = (0, 0, 1)$,

$$\text{所以 } \begin{cases} (1 - \lambda)x_0 + \lambda y_0 = 0, \\ z_0 = 0. \end{cases}$$

令 $x_0 = \lambda$, 则 $y_0 = \lambda - 1$,

所以 $m = (\lambda, \lambda - 1, 0)$.

在线段 BD 上存在点 M , 使得 $CE \parallel$ 平面 AFM 等价于存在 $\lambda \in [0, 1]$, 使得 $m \cdot \overrightarrow{CE} = 0$.

因为 $\overrightarrow{CE} = (-1, -2, 1)$, 由 $m \cdot \overrightarrow{CE} = 0$,

所以 $-\lambda - 2(\lambda - 1) = 0$,

解得 $\lambda = \frac{2}{3} \in [0, 1]$,

所以线段 BD 上存在点 M , 使得 $CE \parallel$ 平面 AFM , 且 $\frac{BM}{BD} = \frac{2}{3}$. $\dots\dots\dots 14 \text{ 分}$

18. (本小题满分 13 分)

解: (I) 当 $a = 1$ 时, $f(x) = \frac{\ln x}{x}$. 所以 $f'(x) = \frac{1 - \ln x}{x^2}$.

因为 $f'(1) = 1, f(1) = 0$,

所以曲线 $y = f(x)$ 在 $(1, f(1))$ 处的切线方程为 $y = x - 1$. $\dots\dots\dots 3$

(II) 当 $a = -1$ 时 $f(x) = \frac{\ln(-x)}{x}$.

函数 $f(x)$ 的定义域为 $(-\infty, 0)$.

不等式 $f(x) \geq x+1$ 成立 $\Leftrightarrow \frac{\ln(-x)}{x} \geq x+1$ 成立 $\Leftrightarrow \ln(-x) - x^2 - x \leq 0$ 成立.

设 $g(x) = \ln(-x) - x^2 - x (x \in (-\infty, 0))$,

则 $g'(x) = \frac{1}{x} - 2x - 1 = \frac{-2x^2 - x + 1}{x} = \frac{(-2x+1)(x+1)}{x}$.

当 x 变化时, $g'(x), g(x)$ 变化情况如下表:

x	$(-\infty, -1)$	-1	$(-1, 0)$
$g'(x)$	$+$	0	$-$
$g(x)$	\nearrow	极大值	\searrow

所以 $g(x) \leq g(-1)$.

因为 $g(-1) = 0$, 所以 $g(x) \leq 0$.

所以 $\frac{\ln(-x)}{x} \geq x+1$ 8分

(III) 求导得 $f'(x) = \frac{1 - \ln(ax)}{x^2}$. 令 $f'(x) = 0$, 因为 $a \neq 0$ 可得 $x = \frac{e}{a}$.

当 $a > 0$ 时 $f(x)$ 定义域为 $(0, +\infty)$. 当 x 变化时 $f'(x), f(x)$ 变化情况如下表:

x	$(0, \frac{e}{a})$	$\frac{e}{a}$	$(\frac{e}{a}, +\infty)$
$f'(x)$	$+$	0	$-$
$f(x)$	\nearrow	极大值	\searrow

此时 $f(x)$ 有极大值 $f(\frac{e}{a}) = \frac{a}{e}$, 无极小值.

当 $a < 0$ 时 $f(x)$ 定义域为 $(-\infty, 0)$. 当 x 变化时 $f'(x), f(x)$ 变化情况如下表:

x	$(-\infty, \frac{e}{a})$	$\frac{e}{a}$	$(\frac{e}{a}, 0)$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	\searrow	极小值	\nearrow

此时 $f(x)$ 有极小值 $f(\frac{e}{a}) = \frac{a}{e}$, 无极大值. 1'

19. (本小题满分 14 分)

解: (I) 由题意 $a = \sqrt{2}, b = 1, c = \sqrt{a^2 - b^2} = 1$

所以离心率 $e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{2}}{2}$, 左焦点 $F(-1, 0)$ 4 分

(II) 当 $y_0 = 0$ 时, 直线 l 方程为 $x = \sqrt{2}$ 或 $x = -\sqrt{2}$, 直线 l 与椭圆 C 相切.

当 $y_0 \neq 0$ 时, 由 $\begin{cases} \frac{x^2}{2} + y^2 = 1, \\ x_0x + 2y_0y = 2 \end{cases}$ 得 $(2y_0^2 + x_0^2)x^2 - 4x_0x + 4 - 4y_0^2 = 0$,

由题知, $\frac{x_0^2}{2} + y_0^2 = 1$, 即 $x_0^2 + 2y_0^2 = 2$,

所以 $\Delta = (4x_0)^2 - 4(2y_0^2 + x_0^2)(4 - 4y_0^2)$

$$= 16[x_0^2 - 2(1 - y_0^2)]$$

$$= 16(x_0^2 + 2y_0^2 - 2) = 0.$$

故直线 l 与椭圆 C 相切. 8 分

(III) 设 $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$,

当 $y_0 = 0$ 时, $x_1 = x_2, y_1 = -y_2, x_1 = \pm\sqrt{2}$,

$$\vec{FA} \cdot \vec{FB} = (x_1 + 1)^2 - y_1^2 = (x_1 + 1)^2 - 6 + (x_1 - 1)^2 = 2x_1^2 - 4 = 0, .$$

所以 $\vec{FA} \perp \vec{FB}$, 即 $\angle AFB = 90^\circ$.

当 $y_0 \neq 0$ 时, 由 $\begin{cases} (x-1)^2 + y^2 = 6, \\ x_0x + 2y_0y = 2 \end{cases}$ 得 $(y_0^2 + 1)x^2 - 2(2y_0^2 + x_0)x + 2 - 10y_0^2 = 0$,

$$\text{则 } x_1 + x_2 = \frac{2(2y_0^2 + x_0)}{1 + y_0^2}, x_1x_2 = \frac{2 - 10y_0^2}{1 + y_0^2},$$

$$y_1y_2 = \frac{x_0}{4y_0^2}x_1x_2 - \frac{x_0}{2y_0^2}(x_1 + x_2) + \frac{1}{y_0^2} = \frac{-5x_0^2 - 4x_0 + 4}{2 + 2y_0^2}.$$

因为 $\vec{FA} \cdot \vec{FB} = (x_1 + 1, y_1) \cdot (x_2 + 1, y_2)$

$$= x_1x_2 + x_1 + x_2 + 1 + y_1y_2$$

$$= \frac{4 - 20y_0^2 + 8y_0^2 + 4x_0 + 2 + 2y_0^2}{2 + 2y_0^2} + \frac{-5x_0^2 - 4x_0 + 4}{2 + 2y_0^2}$$

$$= \frac{-5(x_0^2 + 2y_0^2) + 10}{2 + 2y_0^2} = 0.$$

所以 $\vec{FA} \perp \vec{FB}$, 即 $\angle AFB = 90^\circ$.

故 $\angle AFB$ 为定值 90°

21) (本小题满分13分)

解: (I) $a_0 = 0, a_{10} = 1, a_{100} = 1$ 3分

(II) 反证法: 假设 $\forall i, a_i \neq 0$. 由于 $a_{k+2} = |a_{k+1} - a_k|$,
 记 $M = \max\{a_1, a_2\}$. 则 $a_1 \leq M, a_2 \leq M$.
 则 $0 < a_3 = |a_2 - a_1| \leq M - 1, 0 < a_4 = |a_3 - a_2| \leq M - 1$,
 $0 < a_5 = |a_4 - a_3| \leq M - 2, 0 < a_6 = |a_5 - a_4| \leq M - 2, \dots$,
 依次递推, 有 $0 < a_7 = |a_6 - a_5| \leq M - 3, 0 < a_8 = |a_7 - a_6| \leq M - 3, \dots$,
 则由数学归纳法易得 $a_{2k+1} \leq M - k, k \in \mathbb{N}^*$.
 当 $k > M$ 时, $a_{2k+1} < 0$, 与 $a_{2k+1} > 0$ 矛盾.
 故存在 i , 使 $a_i = 0$.
 所以, 数列 $\{a_n\}$ 必在有限项后出现值为 0 的项. 8分

(III) 首先证明: 数列 $\{a_n\}$ 中必有“1”项. 用反证法,
 假设数列 $\{a_n\}$ 中没有“1”项, 由 (II) 知, 数列 $\{a_n\}$ 中必有“0”项, 设第一个“0”项是
 $a_m (m \geq 3)$, 令 $a_{m-1} = p, p > 1, p \in \mathbb{N}^*$, 则必有 $a_{m-2} = p$,
 于是, 由 $p = a_{m-1} = |a_{m-2} - a_{m-3}| = |p - a_{m-3}|$, 则 $a_{m-3} = 2p$, 因此 p 是 a_{m-3} 的因数,
 由 $p = a_{m-2} = |a_{m-3} - a_{m-4}| = |2p - a_{m-4}|$, 则 $a_{m-4} = p$ 或 $3p$, 因此 p 是 a_{m-4} 的因数.
 依次递推, 可得 p 是 a_1, a_2 的因数, 因为 $p > 1$, 所以这与 a_1, a_2 互质矛盾. 所以, 数列
 $\{a_n\}$ 中必有“1”项.
 其次证明数列 $\{a_n\}$ 中必有无穷多项为“1”.
 假设数列 $\{a_n\}$ 中的第一个“1”项是 a_k , 令 $a_{k-1} = q, q > 1, q \in \mathbb{N}^*$,
 则 $a_{k+1} = |a_k - a_{k-1}| = q - 1$,
 若 $a_{k+1} = q - 1 = 1$, 则数列中的项从 a_k 开始, 依次为“1, 1, 0”的无限循环,
 故有无穷多项为 1;
 若 $a_{k+1} = q - 1 > 1$, 则 $a_{k+2} = |a_{k+1} - a_k| = q - 2, a_{k+3} = |a_{k+2} - a_{k+1}| = 1$,
 若 $a_{k+2} = q - 2 = 1$, 则进入“1, 1, 0”的无限循环, 有无穷多项为 1;
 若 $a_{k+2} = q - 2 > 1$, 则从 a_k 开始的项依次为 $1, q - 1, q - 2, 1, q - 3, q - 4, 1, \dots$,
 必出现连续两个“1”项, 从而进入“1, 1, 0”的无限循环, 故必有无穷多项为 1.
 13分