北京市西城区 2017—2018 学年度第一学期期末试卷

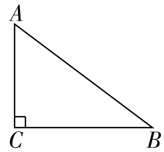
九年级数学 2018.1

考生须知	1. 本试卷共 6 页,共三道大题,28 道小题,满分 100 分,考试时间 120 分钟。 2. 在试卷和答题卡上准确填写学校名称、姓名和准考证号。 3. 试题答案一律填涂或书写在答题卡上,在试卷上作答无效。 4. 在答题卡上,选择题、作图题用 2B 铅笔作答,其他试题用黑色字迹签字笔作答。 5. 考试结束,将本试卷、答题卡和草稿纸一并交回。

一、选择题(本题共 16 分,每小题 2 分)

下面各题均有四个选项,其中只有一个是符合题意的.

1. 如图, 在 Rt$\triangle ABC$ 中,$\angle ACB = 90°$,如果 $AC = 3$,$AB = 5$,那么 $\sin B$ 等于



A. $\frac{3}{5}$　　B. $\frac{4}{5}$　　C. $\frac{3}{4}$　　D. $\frac{4}{3}$

2. 点 $A(1,y_1)$,$B(3,y_2)$ 是反比例函数 $y=-\frac{6}{x}$ 图象上的两点,那么 y_1,y_2 的大小关系是

A. $y_1 > y_2$　　B. $y_1 = y_2$　　C. $y_1 < y_2$　　D. 不能确定

3. 抛物线 $y=(x-4)^2-5$ 的顶点坐标和开口方向分别是

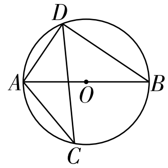
A. $(4,-5)$,开口向上　　B.$(4,-5)$,开口向下

C. $(-4,-5)$,开口向上　　D.$(-4,-5)$,开口向下

4. 圆心角为 $60°$,且半径为 12 的扇形的面积等于

A. 48π　　B. 24π　　C. 4π　　D. 2π

5. 如图, AB 是 $\odot O$ 的直径,CD 是 $\odot O$ 的弦, 如果 $\angle ACD = 34°$,那么 $\angle BAD$ 等于



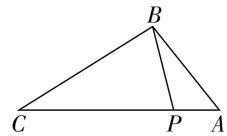
A. $34°$　　B. $46°$

C. $56°$　　D. $66°$

6. 如果函数 $y=x^2+4x-m$ 的图象与 x 轴有公共点,那么 m 的取值范围是

A. $m \leqslant 4$　　B. $m < 4$　　C. $m \geqslant -4$　　D. $m > -4$

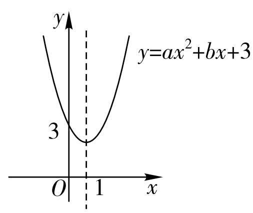
7. 如图, 点 P 在 $\triangle ABC$ 的边 AC 上, 如果添加一个条件后可以得到 $\triangle ABP \backsim \triangle ACB$,那么以下添加的条件中,不正确的是



A. $\angle ABP = \angle C$　　B. $\angle APB = \angle ABC$

C. $AB^2 = AP \cdot AC$　　D. $\frac{AB}{BP} = \frac{AC}{CB}$

8. 如图,抛物线 $y=ax^2+bx+3(a\neq 0)$ 的对称轴为直线 $x=1$,如果关于 x 的方程 $ax^2+bx-8=0(a\neq 0)$ 的一个根为 4, 那么该方程的另一个根为



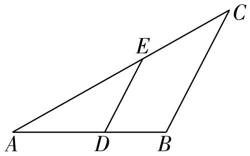
A. -4　　B. -2

C. 1　　D. 3

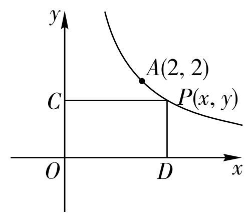
二、填空题(本题共 16 分,每小题 2 分)

9. 抛物线 $y = x^2 + 3$ 与 y 轴的交点坐标为__________.

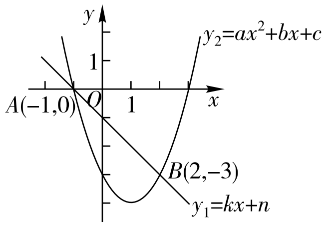
10. 如图,在 $\triangle ABC$ 中,D,E 两点分别在 AB,AC 边上,$DE \parallel BC$,如果 $\dfrac{AD}{DB} = \dfrac{3}{2}$,$AC = 10$,那么 $EC =$ __________.



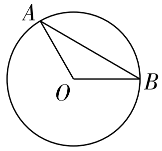
11. 如图,在平面直角坐标系 xOy 中,第一象限内的点 $P(x,y)$ 与点 $A(2,2)$ 在同一个反比例函数的图象上,$PC \perp y$ 轴于点 C,$PD \perp x$ 轴于点 D,那么矩形 $ODPC$ 的面积等于________.



12. 如图,直线 $y_1 = kx + n(k \neq 0)$ 与抛物线 $y_2 = ax^2 + bx + c$ $(a \neq 0)$ 分别交于 $A(-1,0)$,$B(2,-3)$ 两点,那么当 $y_1 > y_2$ 时,x 的取值范围是________.



13. 如图,$\odot O$ 的半径等于 4,如果弦 AB 所对的圆心角等于 $120°$,那么圆心 O 到弦 AB 的距离等于________.



14. 2017 年 9 月热播的专题片《辉煌中国 —— 圆梦工程》展示的中国桥、中国路等超级工程展现了中国现代化进程中的伟大成就,大家纷纷点赞“厉害了,我的国!”片中提到我国已成为拥有斜拉桥最多的国家,世界前十座斜拉桥中,中国占七座,其中苏通长江大桥(如图 1 所示)主桥的主跨长度在世界斜拉桥中排在前列.在图 2 的主桥示意图中,两座索塔及索塔两侧的斜拉索对称分布,大桥主跨 BD 的中点为 E,最长的斜拉索 CE 长 577 m,记 CE 与大桥主梁所夹的锐角 $\angle CED$ 为 α,那么用 CE 的长和 α 的三角函数表示主跨 BD 长的表达式应为 $BD =$ ________(m).

图 1　苏通长江大桥

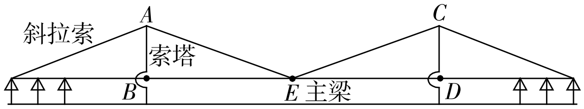
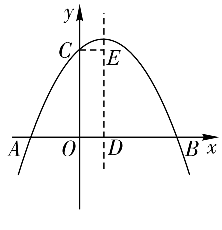
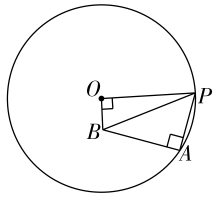


图 2　苏通长江大桥主桥示意图

15. 如图,抛物线 $y = ax^2 + bx + c$ $(a \neq 0)$ 与 y 轴交于点 C,与 x 轴交于 A,B 两点,其中点 B 的坐标为 $B(4,0)$,抛物线的对称轴交 x 轴于点 D,$CE \parallel AB$,并与抛物线的对称轴交于点 E.现有下列结论:①$a > 0$;②$b > 0$;③$4a + 2b + c < 0$;④$AD + CE = 4$.其中所有正确结论的序号是________.



16. 如图，$\odot O$ 的半径为3，A，P 两点在 $\odot O$ 上，点 B 在 $\odot O$ 内，$\tan\angle APB=\dfrac{4}{3}$，$AB\perp AP$. 如果 $OB\perp OP$，那么 OB 的长为________.



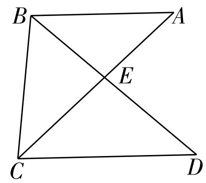
三、解答题（本题共68分，第17－20题每小题5分，第21、22题每小题6分，第23、24题每小题5分，第25、26题每小题6分，第27、28题每小题7分）

17. 计算：$2\sin30^\circ+\cos^2 45^\circ-\tan60^\circ$.

18. 如图，$AB\parallel CD$，AC 与 BD 的交点为 E，$\angle ABE=\angle ACB$.

（1）求证：$\triangle ABE\backsim\triangle ACB$；

（2）如果 $AB=6$，$AE=4$，求 AC，CD 的长.

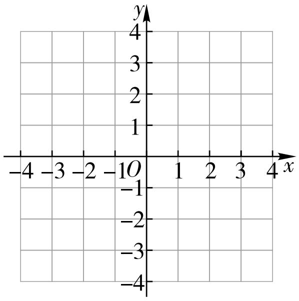


19. 在平面直角坐标系 xOy 中，抛物线 C_1：$y=-x^2+2x$.

（1）补全表格：

抛物线	顶点坐标	与 x 轴交点坐标		与 y 轴交点坐标
$y=-x^2+2x$	$(1,1)$			$(0,0)$

（2）将抛物线 C_1 向上平移3个单位得到抛物线 C_2，请画出抛物线 C_1，C_2，并直接回答：抛物线 C_2 与 x 轴的两交点之间的距离是抛物线 C_1 与 x 轴的两交点之间距离的多少倍.



20. 在 $\triangle ABC$ 中，$AB = AC = 2$，$\angle BAC = 45°$. 将 $\triangle ABC$ 绕点 A 逆时针旋转 α 度（$0° < \alpha < 180°$）得到 $\triangle ADE$，B，C 两点的对应点分别为点 D，E，BD，CE 所在直线交于点 F.

（1）当 $\triangle ABC$ 旋转到图 1 位置时，$\angle CAD =$ ________（用含 α 的代数式表示），$\angle BFC$ 的度数为________ °；

（2）当 $\alpha = 45°$ 时，在图 2 中画出 $\triangle ADE$，并求此时点 A 到直线 BE 的距离.

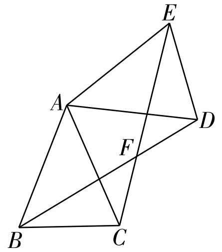


图 1

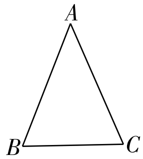
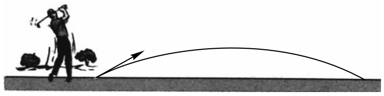


图 2

21. 运动员将小球沿与地面成一定角度的方向击出，在不考虑空气阻力的条件下，小球的飞行高度 h(m) 与它的飞行时间 t(s) 满足二次函数关系，t 与 h 的几组对应值如下表所示.



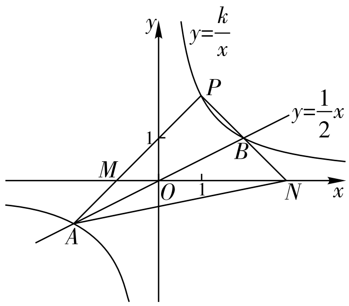
t(s)	0	0.5	1	1.5	2	…
h(m)	0	8.75	15	18.75	20	…

（1）求 h 与 t 之间的函数关系式（不要求写 t 的取值范围）；

（2）求小球飞行 3 s 时的高度；

（3）问：小球的飞行高度能否达到 22 m？请说明理由.

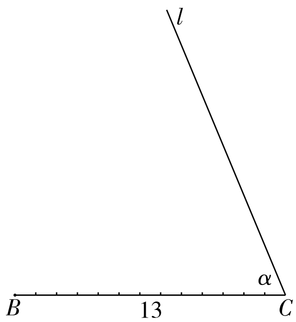
22. 如图，在平面直角坐标系 xOy 中，双曲线 $y = \dfrac{k}{x}$（$k \neq 0$）与直线 $y = \dfrac{1}{2}x$ 的交点分别为 $A(a, -1)$，$B(2, b)$ 两点，双曲线上一点 P 的横坐标为 1，直线 PA，PB 与 x 轴的交点分别为点 M，N，连接 AN.



（1）直接写出 a，k 的值；

（2）求证：$PM = PN$，$PM \perp PN$.

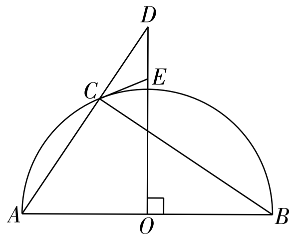
23. 如图,线段 BC 长为 13,以 C 为顶点, CB 为一边的 $\angle\alpha$ 满足 $\cos\alpha=\frac{5}{13}$. 锐角 $\triangle ABC$ 的顶点 A 落在 $\angle\alpha$ 的另一边 l 上,且满足 $\sin A=\frac{4}{5}$. 求 $\triangle ABC$ 的高 BD 及 AB 边的长,并结合你的计算过程画出高 BD 及 AB 边. (图中提供的单位长度供补全图形使用)



24. 如图,AB 是半圆的直径,过圆心 O 作 AB 的垂线,与弦 AC 的延长线交于点 D,点 E 在 OD 上,$\angle DCE=\angle B$.

(1) 求证:CE 是半圆的切线;

(2) 若 $CD=10$,$\tan B=\frac{2}{3}$,求半圆的半径.



25. 已知抛物线 G:$y=x^2-2ax+a-1$(a 为常数).

(1) 当 $a=3$ 时,用配方法求抛物线 G 的顶点坐标;

(2) 若记抛物线 G 的顶点坐标为 $P(p,q)$.

① 分别用含 a 的代数式表示 p,q;

② 请在 ① 的基础上继续用含 p 的代数式表示 q;

③ 由 ①② 可得,顶点 P 的位置会随着 a 的取值变化而变化,但点 P 总落在______的图象上.

A. 一次函数　　B. 反比例函数　　C. 二次函数

(3) 小明想进一步对(2) 中的问题进行如下改编:将(2) 中的抛物线 G 改为抛物线 H:$y=x^2-2ax+N$(a 为常数),其中 N **为含 a 的代数式**,从而使这个新**抛物线** H 满足:无论 a 取何值,它的顶点总落在某个一次函数的图象上.

请按照小明的改编思路,写出一个符合以上要求的新**抛物线** H 的函数表达式:________(用含 a 的代数式表示),它的顶点所在的一次函数图象的表达式 $y=kx+b$(k,b 为常数,$k\neq0$)中,$k=$________,$b=$________.

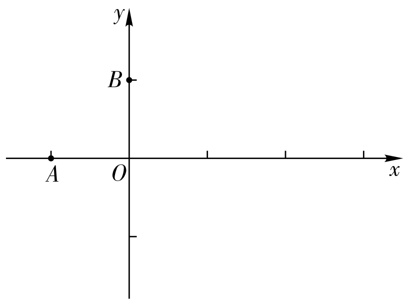
26. 在平面直角坐标系 xOy 中，抛物线 M：$y=ax^2+bx+c(a\neq 0)$ 经过点 $A(-1,0)$，且顶点坐标为 $B(0,1)$.

(1) 求抛物线 M 的函数表达式；

(2) 设 $F(t,0)$ 为 x 轴正半轴上一点，将抛物线 M 绕点 F 旋转 $180°$ 得到抛物线 M_1.

① 抛物线 M_1 的顶点 B_1 的坐标为__________；

② 当抛物线 M_1 与线段 AB 有公共点时，结合函数的图象，求 t 的取值范围.



27. 如图 1，在 Rt$\triangle AOB$ 中，$\angle AOB=90°$，$\angle OAB=30°$，点 C 在 OB 边上，$OC=2BC$，AO 边上的一点 D 满足 $\angle OCD=30°$. 将 $\triangle OCD$ 绕点 O 逆时针旋转 α 度（$90°<\alpha<180°$）得到 $\triangle OC'D'$，C，D 两点的对应点分别为点 C'，D'，连接 AC'，BD'，取 AC' 的中点 M，连接 OM.

(1) 如图 2，当 $C'D'\parallel AB$ 时，$\alpha=$________$°$，此时 OM 和 BD' 之间的位置关系为________；

(2) 画图探究线段 OM 和 BD' 之间的位置关系和数量关系，并加以证明.

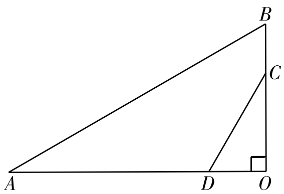


图 1

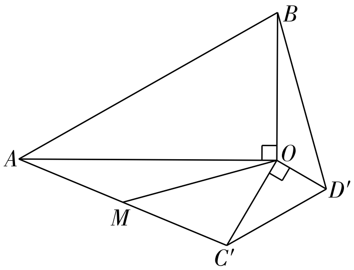
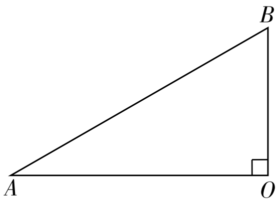


图 2



备用图

28. 在平面直角坐标系 xOy 中，A，B 两点的坐标分别为 $A(2,2)$，$B(2,-2)$. 对于给定的线段 AB 及点 P，Q，给出如下定义：若点 Q 关于 AB 所在直线的对称点 Q' 落在 $\triangle ABP$ 的内部（不含边界），则称点 Q 是点 P 关于线段 AB 的内称点.

(1) 已知点 $P(4,-1)$.

① 在 $Q_1(1,-1)$，$Q_2(1,1)$ 两点中，是点 P 关于线段 AB 的内称点的是________；

② 若点 M 在直线 $y=x-1$ 上，且点 M 是点 P 关于线段 AB 的内称点，求点 M 的横坐标 x_M 的取值范围；

(2) 已知点 $C(3,3)$，$\odot C$ 的半径为 r，点 $D(4,0)$，若点 E 是点 D 关于线段 AB 的内称点，且满足直线 DE 与 $\odot C$ 相切，求半径 r 的取值范围.

北京市西城区 2017—2018 学年度第一学期期末试卷

九年级数学参考答案及评分标准　　2018.1

一、选择题(本题共 16 分,每小题 2 分)

题号	1	2	3	4	5	6	7	8
答案	A	C	A	B	C	C	D	B

二、填空题(本题共 16 分,每小题 2 分)

9. (0,3).　　10. 4.　　11. 4.　　12. $-1 < x < 2$.　　13. 2.

14. $1154\cos\alpha$(或 $2CE\cdot\cos\alpha$).　　15. ②④.　　16. 1.

三、解答题(本题共 68 分,第 17-20 题每小题 5 分,第 21、22 题每小题 6 分,第 23、24 题每小题 5 分,第 25、26 题每小题 6 分,第 27、28 题每小题 7 分)

17. 解: $2\sin30° + \cos^2 45° - \tan60°$.

$= 2\times\frac{1}{2} + \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 - \sqrt{3}$ ………… 3 分

$= 1 + \frac{1}{2} - \sqrt{3}$ ………… 4 分

$= \frac{3}{2} - \sqrt{3}$. ………… 5 分

18.(1) 证明:如图 1.

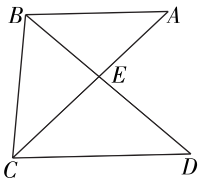


图 1

$\because\ \angle ABE = \angle ACB, \angle A = \angle A$,

$\therefore\ \triangle ABE \backsim \triangle ACB$. ………… 2 分

(2) 解:由(1) 得 $\frac{AB}{AC} = \frac{AE}{AB}$. ………… 3 分

$\therefore\ AB^2 = AC\cdot AE$.

$\because AB = 6, AE = 4$,

$\therefore AC = \frac{AB^2}{AE} = 9$. ………… 4 分

$\because AB \parallel CD$,

$\therefore\ \triangle CDE \backsim \triangle ABE$.

$\therefore\ \frac{CD}{AB} = \frac{CE}{AE}$.

$\therefore CD = \frac{AB\cdot CE}{AE} = \frac{AB\cdot(AC - AE)}{AE} = \frac{6\times5}{4} = \frac{15}{2}$.

………… 5 分

19. 解:(1)(0,0),(2,0). ………… 2 分

(2) 画图见图 2. ………… 4 分

2 倍. ………… 5 分

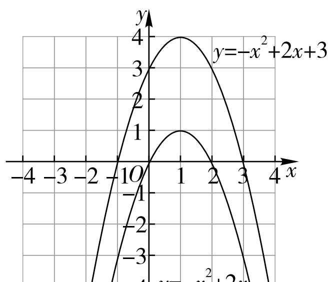


图 2

20. 解:(1)$\alpha - 45°$,45. ………… 2 分

（2）画图如图 3. ………………………………………… 3 分

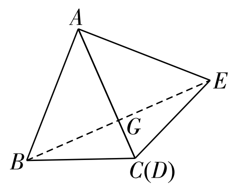


图 3

连接 BE,设 AC 与 BE 交于点 G.

由题意可知,$\angle BAC = \angle CAE = 45°$,$AB = AC = AE = 2$.

$\therefore$ $\angle BAE = 90°$, $AG \perp BE$,$BG = EG$.

$\therefore$ 点 A 到直线 BE 的距离即为线段 AG 的长. ………… 4 分

$\therefore AG = \dfrac{BE}{2} = \dfrac{\sqrt{2}AB}{2} = \sqrt{2}$. ………………………………… 5 分

$\therefore$ 当 $\alpha = 45°$ 时,点 A 到直线 BE 的距离为$\sqrt{2}$.

21. 解:(1) $\because$ $t = 0$ 时,$h = 0$,

$\therefore$ 设 h 与 t 的函数关系式为 $h = at^2 + bt(a \neq 0)$. ………………………………… 1 分

$\because$ $t = 1$ 时,$h = 15$;$t = 2$ 时,$h = 20$,

$\therefore$ $\begin{cases} a + b = 15, \\ 4a + 2b = 20. \end{cases}$ ……………………………………………………………… 2 分

解得$\begin{cases} a = -5, \\ b = 20. \end{cases}$ ……………………………………………………………………… 3 分

$\therefore$ h 与 t 之间的函数关系式为 $h = -5t^2 + 20t$. ………………………………… 4 分

（2）小球飞行 3 秒时,$t = 3(s)$,此时 $h = -5 \times 3^2 + 20 \times 3 = 15(\mathrm{m})$.

答:此时小球的高度为 15 m. ………………………………………………………… 5 分

（3）方法一:设 $t(s)$ 时,小球的飞行高度达到 22 m.

则 $-5t^2 + 20t = 22$. 即 $5t^2 - 20t + 22 = 0$.

$\because \Delta = (-20)^2 - 4 \times 5 \times 22 < 0$,

$\therefore$ 此方程无实数根.

所以小球的飞行高度不能达到 22 m. ………………………………………………… 6 分

方法二:$\because$ $h = -5t^2 + 20t = -5(t - 2)^2 + 20$,

$\therefore$ 小球飞行的最大高度为 20 m.

$\because$ $22 > 20$,$\therefore$ 小球的飞行高度不能达到 22 m. ………………………………… 6 分

22. 解:(1)$a = -2$,$k = 2$. ……………………………………………………………… 2 分

（2）证明:$\because$ 双曲线 $y = \dfrac{2}{x}$ 上一点 P 的横坐标为 1,

$\therefore$ 点 P 的坐标为 $P(1,2)$. ………………………………………………………… 3 分

$\therefore$ 直线 PA,PB 的函数表达式分别为 $y = x + 1$,$y = -x + 3$.

$\therefore$ 直线 PA,PB 与 x 轴的交点坐标分别为 $M(-1,0)$,$N(3,0)$.

$\therefore PM = 2\sqrt{2}$,$PN = 2\sqrt{2}$,$MN = 4$. ………………………………………… 4 分

$\therefore PM = PN$, ……………………………………………………………………… 5 分

$PM^2 + PN^2 = MN^2$.

$\therefore$ $\angle MPN = 90°$.

$\therefore PM \perp PN$. ……………………………………………………………………… 6 分

说明:其他正确的解法相应给分.

23. 解：如图 4，作 $BD \perp l$ 于点 D. ………………………………………………………… 1 分

在 $\mathrm{Rt}\triangle CBD$ 中，$\angle CDB = 90°$，$BC = 13$，$\cos C = \cos\alpha = \dfrac{5}{13}$，

$\therefore\ CD = BC \cdot \cos C = 13 \times \dfrac{5}{13} = 5$， ………………………………………… 2 分

$BD = \sqrt{BC^2 - CD^2} = \sqrt{13^2 - 5^2} = 12.$ ……………………… 3 分

在 $\mathrm{Rt}\triangle ABD$ 中，$\angle ADB = 90°$，$BD = 12$，$\sin A = \dfrac{4}{5}$，

$\therefore AB = \dfrac{BD}{\sin A} = \dfrac{12}{\frac{4}{5}} = 15.$ ……………………………………… 4 分

$AD = \dfrac{BD}{\tan A} = \dfrac{12}{\frac{4}{3}} = 9.$

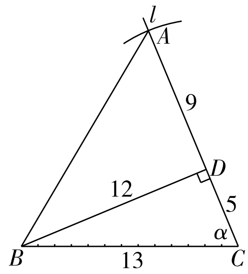


图 4

作图：以点 D 为圆心，9 为半径作弧与射线 l 交于点 A，连接 AB. ………………… 5 分

24.（1）证明：如图 5，连接 OC.

$\because AB$ 是半圆的直径，AC 是半圆的弦，

$\therefore\ \angle ACB = 90°.$ ………………………………………… 1 分

$\because$ 点 D 在弦 AC 的延长线上，

$\therefore\ \angle DCB = 180° - \angle ACB = 90°.$

$\therefore\ \angle DCE + \angle BCE = 90°.$

$\because OC = OB$，

$\therefore\ \angle BCO = \angle B.$

$\because\ \angle DCE = \angle B$，

$\therefore\ \angle BCO + \angle BCE = 90°$，即 $\angle OCE = 90°.$ ………………………………………… 2 分

$\therefore CE \perp OC.$

$\therefore CE$ 是半圆的切线. ………………………………………………………………………… 3 分

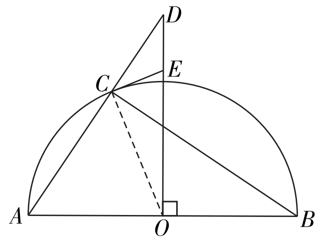


图 5

（2）解：设半圆的半径长为 r.

在 $\mathrm{Rt}\triangle ABC$ 中，$\angle ACB = 90°$，$\tan B = \dfrac{2}{3}$，

设 $AC = 2k$，则 $BC = 3k$，$AB = \sqrt{AC^2 + BC^2} = \sqrt{13}k.$

$\therefore \sin B = \dfrac{AC}{AB} = \dfrac{2}{13}\sqrt{13}.$

$\because OD \perp AB$，

$\therefore\ \angle D + \angle A = 90°.$

$\because AB$ 是半圆的直径，

$\therefore\ \angle ACB = 90°$，$\angle B + \angle A = 90°.$

$\therefore\ \angle D = \angle B.$

$\therefore \sin D = \sin B = \dfrac{2}{13}\sqrt{13}.$

在 $\mathrm{Rt}\triangle AOD$ 中，$\angle AOD=90°$，$\sin D=\dfrac{2}{13}\sqrt{13}$，

又 $\because$ $CD=10$，

$\therefore$ $\dfrac{OA}{AD}=\dfrac{\sqrt{13}k}{2(2k+10)}=\dfrac{2}{13}\sqrt{13}$.

$\therefore 13k=4(2k+10)$.

解得 $k=8$.

经检验，$k=8$ 是原方程的解.

$\therefore r=\dfrac{\sqrt{13}}{2}k=4\sqrt{13}$. …………………………………………………… 5 分

25. 解：(1) 当 $a=3$ 时，抛物线 G 为 $y=x^2-6x+2$.

$\therefore y=x^2-6x+2=x^2-2\times 3x+3^2-3^2+2=(x-3)^2-7$. …………… 1 分

此时抛物线 G 的顶点坐标为 $(3,-7)$. ………………………………………… 2 分

(2) ① $y=x^2-2ax+a-1=(x^2-2ax+a^2)-a^2+a-1=(x-a)^2-a^2+a-1$.

$\because$ 抛物线 G 的顶点坐标为 $P(p,q)$，

$\therefore$ $\begin{cases}p=a,\\ q=-a^2+a-1.\end{cases}$ ……………………………………………………… 3 分

② 由 ① 得 $q=-p^2+p-1$. ……………………………………………………… 4 分

③C. ……………………………………………………………………………… 5 分

(3) 答案不唯一，如新抛物线 H 的函数表达式为 $\underline{y=x^2-2ax+a^2+a}$，$k=\underline{1}$，$b=\underline{0}$.

……………………………………………………………………………………… 6 分

26. 解：(1) $\because$ 抛物线 M 的顶点坐标为 $B(0,1)$，

$\therefore$ 设抛物线 M 的函数表达式为 $y=ax^2+1$. …………………………………… 1 分

$\because$ 抛物线 M 经过点 $A(-1,0)$，

$\therefore$ $a\times(-1)^2+1=0$. 解得 $a=-1$. ………………………………………… 2 分

$\therefore$ 抛物线 M 的函数表达式为 $y=-x^2+1$. …………………………………… 3 分

(2) ① $B_1(2t,-1)$. ………………………………… 4 分

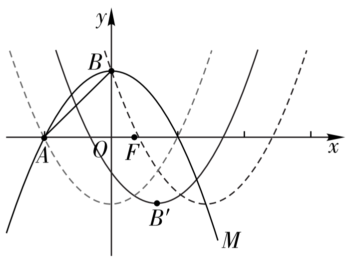


图 6

② 由题意可知抛物线 M_1 的顶点 B_1 的坐标为 $B_1(2t,-1)$，二次项系数为 1，

$\therefore$ 抛物线 M_1 的函数表达式为 $y=(x-2t)^2-1$ $(t>0)$.

当抛物线 M_1 经过点 $A(-1,0)$ 时（如图 6），

$(-1-2t)^2-1=0$.

解得 $t_1=-1$，$t_2=0$.

当抛物线 M_1 经过点 $B(0,1)$ 时（如图 6），

$(2t)^2-1=1$.

解得 $t=\pm\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

结合图象分析,因为 $t > 0$,所以当抛物线 M_1 与线段 AB 有公共点时,t 的取值范围是$0 < t \leqslant \dfrac{\sqrt{2}}{2}$. ………………………………………………………… 6 分

27. 解:(1) 150. ………………………………………………………………… 1 分

$OM \perp BD'$. ………………………………………………………………… 2 分

(2) $OM \perp BD'$,$OM = \dfrac{\sqrt{3}}{2}BD'$.

证明:如图 7,取 AO 的中点 E,连接 ME,延长 MO 交 BD' 于点 N.

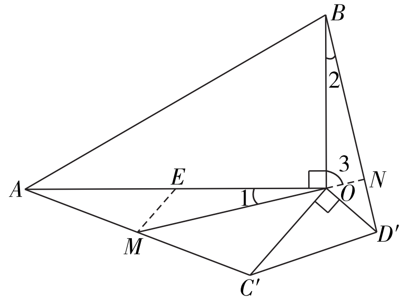


图 7

$\because$ E,M 分别为 AO,AC' 的中点,

$\therefore EM \parallel OC'$,$EM = \dfrac{OC'}{2}$.

$\therefore \angle OEM + \angle AOC' = 180°$.

$\because \angle AOB = \angle C'OD' = 90°$,

$\therefore \angle BOD' + \angle AOC' = 180°$.

$\therefore \angle OEM = \angle BOD'$. ① ……………… 3 分

$\because$ $\angle OAB = \angle OC'D' = 30°$,

$$\therefore \frac{EO}{EM} = \frac{\frac{AO}{2}}{\frac{OC'}{2}} = \frac{AO}{OC'} = \frac{\sqrt{3}OB}{\sqrt{3}OD'} = \frac{OB}{OD'},$$

即$\dfrac{EO}{OB} = \dfrac{EM}{OD'}$. ② ………………………………………………… 4 分

由 ①② 得 $\triangle EOM \backsim \triangle OBD'$. ………………………………………… 5 分

$\therefore \angle 1 = \angle 2$,

$\dfrac{OM}{BD'} = \dfrac{EO}{OB} = \dfrac{AO}{2OB} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$,即 $OM = \dfrac{\sqrt{3}}{2}BD'$. ……………………………… 6 分

$\because$ 点 N 是 MO 的延长线与 BD' 的交点,$\angle AOB = 90°$,

$\therefore \angle 1 + \angle 3 = 180° - \angle AOB = 90°$.

$\therefore \angle 2 + \angle 3 = 90°$.

$\therefore OM \perp BD'$. ………………………………………………………… 7 分

说明:其他正确的解法相应给分.

28. 解:(1) ①Q_1.(见图 8) ……………………………………………… 1 分

② 如图 9,点 $P(4, -1)$ 关于 AB 所在直线的对称点为 $P'(0, -1)$, ……… 2 分

此时点 P' 恰好在直线 $y = x - 1$ 上.

$\because$ 点 M 是点 P 关于线段 AB 的内称点,

$\therefore$ 点 M 关于 AB 所在直线的对称点 M' 落在 $\triangle ABP$ 的内部(不含边界).

又 $\because$ 点 M 在直线 $y = x - 1$ 上,

$\therefore$ 点 M 应在线段 $P'G$ 上(点 G 为线段 AB 与直线 $y = x - 1$ 的交点),且不与两个端点 P',G 重合.

$\therefore\ 0 < x_M < 2$. …………………………………………………………………… 3 分

(2) 如图 10.

$\because$ 点 E 是点 D 关于线段 AB 的内称点,

$\therefore$ 点 E 关于 AB 所在直线的对称点 E' 应在 $\triangle ABD$ 的内部(不含边界).

$\because$ 点 D 关于 AB 所在直线的对称点为原点 O,

$\therefore$ 点 E 应在 $\triangle ABO$ 的内部(不含边界). …………………………………………… 4 分

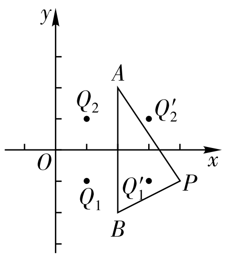


图 8

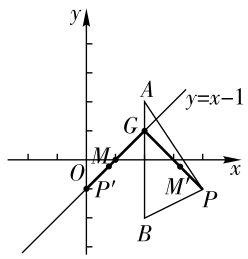


图 9

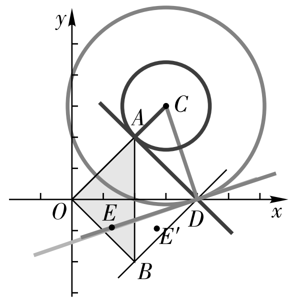


图 10

$\because\ A(2,2), C(3,3), D(4,0)$,

可得 $AC = \sqrt{2}, AD = 2\sqrt{2}, CD = \sqrt{10}$.

$\therefore AC^2 + AD^2 = CD^2$.

$\therefore \angle CAD = 90°$.

$\therefore AC \perp AD$.

此时直线 DA 与以 AC 为半径的 $\odot C$ 相切,半径 $AC = \sqrt{2}$. ……………………… 5 分

当直线 DE 与以 CD 为半径的 $\odot C$ 相切,D 为切点时,$\odot C$ 的半径最大,最大值为 $\sqrt{10}$.

$\therefore$ 符合题意的 $\odot C$ 的半径 r 的取值范围是 $\sqrt{2} < r \leqslant \sqrt{10}$. ………………… 7 分