

北京市东城区 2018-2019 学年度第二学期高三综合练习 (一)

2019.4

数学 (理科)

本试卷共 5 页, 共 150 分。考试时长 120 分钟。考生务必将答案答在答题卡上, 在试卷上作答无效。考试结束后, 将答题卡交回。

第一部分 (选择题 共 40 分)

一、选择题共 8 小题, 每小题 5 分, 共 40 分。在每小题列出的四个选项中, 选出符合题目要求的一项。

(1) 已知集合 $A = \{x | 2x^2 + x > 0\}$, $B = \{x | 2x + 1 > 0\}$, 则 $A \cap B =$

(A) $\left\{x \mid x > -\frac{1}{2}\right\}$

(B) $\left\{x \mid x > \frac{1}{2}\right\}$

(C) $\{x | x > 0\}$

(D) $\mathbf{R}$

(2) 在复平面内, 若复数 $(2-i)z$ 对应的点在第二象限, 则 z 可以为

(A) 2

(B) -1

(C) i

(D) $2+i$

(3) 在平面直角坐标系 xOy 中, 角 α 以 Ox 为始边, 终边经过点 $P(-1, m)$ ($m \neq 0$), 则下列各式的值一定为负的是

(A) $\sin \alpha + \cos \alpha$

(B) $\sin \alpha - \cos \alpha$

(C) $\sin \alpha \cos \alpha$

(D) $\frac{\sin \alpha}{\tan \alpha}$

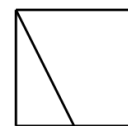
(4) 正方体被一个平面截去一部分后, 所得几何体的三视图如图所示, 则该截面图形的形状为

(A) 等腰三角形

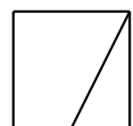
(B) 直角三角形

(C) 平行四边形

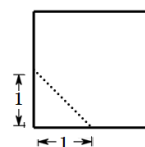
(D) 梯形



正(主)视图



侧(左)视图



俯视图

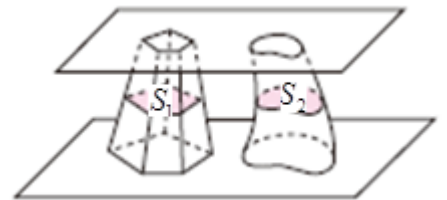
(5) 若 x, y 满足 $\begin{cases} x+y \geq 0, \\ y+1 \leq 0, \\ y \geq 2x-6, \end{cases}$ 则 $|x-y|$ 的最大值为

- (A) 0 (B) 1 (C) 2 (D) 4

(6) 已知直线 l 过抛物线 $y^2 = 8x$ 的焦点 F ，与抛物线交于 A, B 两点，与其准线交于点 C 。若点 F 是 AC 的中点，则线段 BC 的长为

- (A) $\frac{8}{3}$ (B) 3 (C) $\frac{16}{3}$ (D) 6

(7) 南北朝时代的伟大数学家祖暅在数学上有突出贡献，他在实践的基础上提出祖暅原理：“幂势既同，则积不容异”。其含义是：夹在两个平行平面之间的两个几何体，被平行于这两个平行平面的任意平面所截，如果截得的两个截面的面积总相等，那么这两个几何体的体积相等。如图，夹在两个平行平面之间的两个几何体的体积分别为 V_1, V_2 ，被平行于这两个平面的任意平面截得的两个截面的面积分别为 S_1, S_2 ，则“ V_1, V_2 相等”是“ S_1, S_2 总相等”的



- (A) 充分而不必要条件 (B) 必要而不充分条件
(C) 充分必要条件 (D) 既不充分也不必要条件

(8) 已知数列 $\{a_n\}$ 满足： $a_1 = a$ ， $a_{n+1} = \frac{a_n}{2} + \frac{1}{a_n}$ ($n \in \mathbf{N}^*$)，则下列关于 $\{a_n\}$ 的判断正确的是

- (A) $\forall a > 0, \exists n \geq 2$, 使得 $a_n < \sqrt{2}$
(B) $\exists a > 0, \exists n \geq 2$, 使得 $a_n < a_{n+1}$
(C) $\forall a > 0, \exists m \in \mathbf{N}^*$, 总有 $a_m < a_n$ ($m \neq n$)
(D) $\exists a > 0, \exists m \in \mathbf{N}^*$, 总有 $a_{m+n} = a_n$

第二部分 (非选择题 共 110 分)

二、填空题共 6 小题, 每小题 5 分, 共 30 分。

(9) 在 $(\sqrt{2}-x)^6$ 的展开式中, x^2 的系数是_____。(用数字作答)

(10) 在 $\triangle ABC$ 中, 若 $b \cos C + c \sin B = 0$, 则 $\angle C =$ _____.

(11) 若曲线 $C: \begin{cases} x = a + \cos \theta, \\ y = 2 + \sin \theta \end{cases}$ (θ 为参数) 关于直线 $l: \begin{cases} x = 1 + t, \\ y = -2 + 2t \end{cases}$ (t 为参数) 对称, 则 $a =$ _____;

此时原点 O 到曲线 C 上点的距离的最大值为_____.

(12) 已知向量 $a = (1, \sqrt{3})$, 向量 b 为单位向量, 且 $a \cdot b = 1$, 则 $2b - a$ 与 $2b$ 夹角为_____.

(13) 已知函数 $f(x) = 4x - x^3$, 若 $\forall x_1, x_2 \in [a, b], x_1 \neq x_2$, 都有 $2f(x_1 + x_2) > f(2x_1) + f(2x_2)$ 成立, 则满足条件的一个区间是_____.

(14) 设 A, B 是 $\mathbf{R}$ 中两个子集, 对于 $x \in \mathbf{R}$, 定义: $m = \begin{cases} 0, & x \notin A, \\ 1, & x \in A, \end{cases} n = \begin{cases} 0, & x \notin B, \\ 1, & x \in B. \end{cases}$

①若 $A \subseteq B$ 则对任意 $x \in \mathbf{R}$, $m \cdot (1 - n) =$ _____;

②若对任意 $x \in \mathbf{R}$, $m + n = 1$, 则 A, B 的关系为_____.

三、解答题共 6 小题, 共 80 分。解答应写出文字说明, 演算步骤或证明过程。

(15) (本小题 13 分)

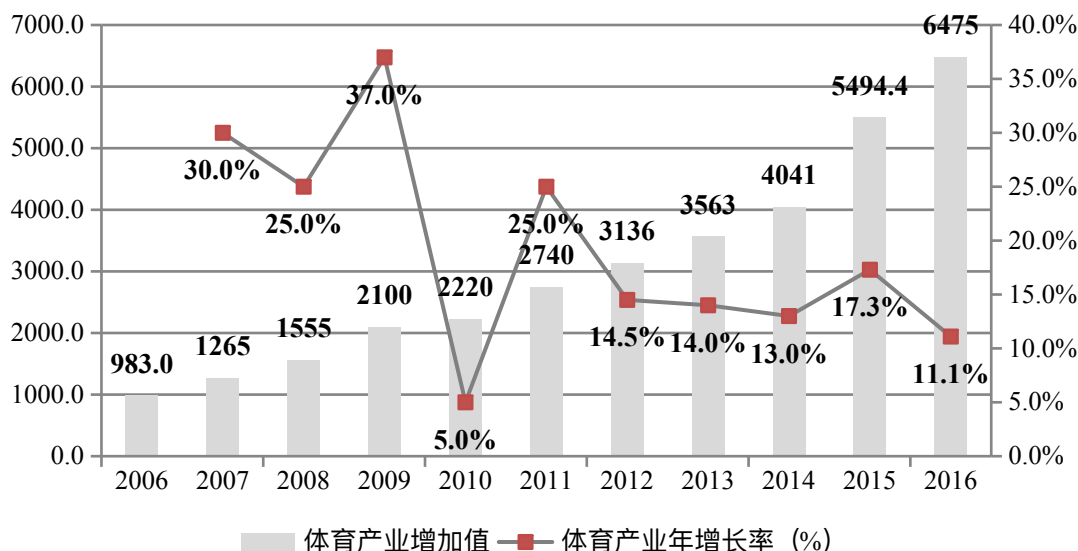
已知函数 $f(x) = 4a \cos x \sin(x - \frac{\pi}{6})$, 且 $f(\frac{\pi}{3}) = 1$.

(I) 求 a 的值及 $f(x)$ 的最小正周期;

(II) 若 $f(x)$ 在区间 $[0, m]$ 上单调递增, 求 m 的最大值.

(16) (本小题 13 分)

改革开放 40 年来, 体育产业蓬勃发展反映了“健康中国”理念的普及. 下图是我国 2006 年至 2016 年体育产业年增加值及年增速图. 其中条形图为体育产业年增加值 (单位: 亿元), 折线图为体育产业年增长率 (%) .



(I) 从 2007 年至 2016 年随机选择 1 年, 求该年体育产业年增加值比前一年的体育产业年增加值多 500 亿元以上的概率;

(II) 从 2007 年至 2016 年随机选择 3 年, 设 X 是选出的三年中体育产业年增长率超过 20% 的年数, 求 X 的分布列与数学期望;

(III) 由图判断, 从哪年开始连续三年的体育产业年增长率方差最大? 从哪年开始连续三年的体育产业年增加值方差最大? (结论不要求证明)

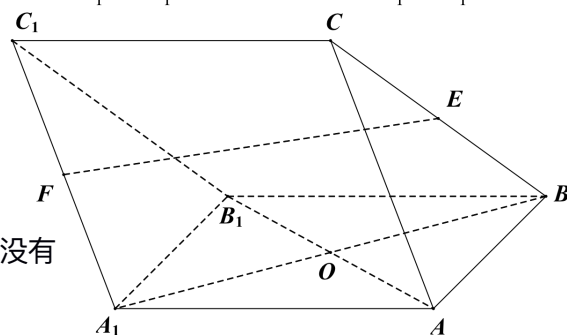
(17) (本小题 14 分)

如图, 在棱长均为 2 的三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中, 点 C 在平面 A_1ABB_1 内的射影 O 为 AB_1 与 A_1B 的交点, E, F 分别为 BC, A_1C_1 的中点.

(I) 求证: 四边形 A_1ABB_1 为正方形;

(II) 求直线 EF 与平面 A_1ACC_1 所成角的正弦值;

(III) 在线段 AB_1 上存在一点 D , 使得直线 EF 与平面 A_1CD 没有公共点, 求 $\frac{AD}{DB_1}$ 的值.



(18) (本小题 13 分)

设函数 $f(x) = ax^2 + (a-2)x - \ln x$ 的极小值点为 x_0 .

(I) 若 $x_0 = 1$, 求 a 的值 $f(x)$ 的单调区间;

(II) 若 $0 < x_0 < 1$, 在曲线 $y = f(x)$ 上是否存在点 P , 使得点 P 位于 x 轴的下方? 若存在, 求出一个 P 点坐标, 若不存在, 说明理由.

(19) (本小题 13 分)

已知椭圆 $C: \frac{x^2}{4m} + \frac{y^2}{m} = 1 (m > 0)$ 与 x 轴交于两点 A_1, A_2 , 与 y 轴的一个交点为 B , $\triangle BA_1A_2$ 的面积为 2.

(I) 求椭圆 C 的方程及离心率;

(II) 在 y 轴右侧且平行于 y 轴的直线 l 与椭圆 C 交于不同的两点 P_1, P_2 , 直线 A_1P_1 与直线 A_2P_2 交于点 P .

以原点 O 为圆心, 以 A_1B 为半径的圆与 x 轴交于 M, N 两点 (点 M 在点 N 的左侧), 求 $|PM| - |PN|$ 的值.

(20) (本小题 14 分)

已知 $L \in \mathbb{N}^*$, 数列 $A: a_1, a_2, \dots, a_n$ 中的项均为不大于 L 的正整数. c_k 表示 $a_1, a_2, \dots, a_n$ 中 k 的个数 ($k = 1, 2, \dots, L$). 定义变换 T , T 将数列 A 变成数列 $T(A): t(a_1), t(a_2), \dots, t(a_n)$ 其中 $t(k) = L \cdot \frac{c_1 + c_2 + \dots + c_k}{n}$.

(I) 若 $L = 4$, 对数列 $A: 1, 1, 2, 3, 3, 4$, 写出 $c_i (1 \leq i \leq 4)$ 的值;

(II) 已知对任意的 $k (k = 1, 2, \dots, n)$, 存在 A 中的项 a_m , 使得 $a_m = k$.

求证: $t(a_i) = a_i (i = 1, 2, \dots, n)$ 的充分必要条件为 $c_i = c_j (i, j = 1, 2, \dots, L)$;

(III) 若 $l = n$, 对于数列 $A: a_1, a_2, \dots, a_n$, 令 $T(T(A)): b_1, b_2, \dots, b_n$, 求证: $b_i = t(a_i) (i = 1, 2, \dots, n)$.

数学 (理科) 参考答案及评分标准

一、选择题 (共 8 小题, 每小题 5 分, 共 40 分)

- (1) C (2) B (3) D (4) A
(5) D (6) C (7) B (8) D

二、填空题 (共 6 小题, 每小题 5 分, 共 30 分)

- (9) 60 (10) $\frac{3}{4}\pi$
(11) $3\sqrt{13}+1$ (12) 60°
(13) (0,1) (答案不唯一) (14) 0 $A = {}_R B$

三、解答题 (共 6 小题, 共 80 分)

(15) (共 13 分)

解: (I) 由已知 $f(\frac{\pi}{3})=1$, 得 $4a \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = 1$, 解得 $a=1$.

$$\begin{aligned} f(x) &= 4 \cos x \sin(x - \frac{\pi}{6}) \\ &= 4 \cos x (\frac{\sqrt{3}}{2} \sin x - \frac{1}{2} \cos x) \\ &= 2\sqrt{3} \sin x \cos x - 2 \cos^2 x \\ &= \sqrt{3} \sin 2x - \cos 2x - 1 \\ &= 2 \sin(2x - \frac{\pi}{6}) - 1 \end{aligned}$$

所以 $f(x) = 2 \sin(2x - \frac{\pi}{6}) - 1$ 的最小正周期为 π .

.....7 分

(II) 由 (I) 知 $f(x) = 2 \sin(2x - \frac{\pi}{6}) - 1$.

当 $x \in [0, m]$ 时, $2x - \frac{\pi}{6} \in [-\frac{\pi}{6}, 2m - \frac{\pi}{6}]$,

若 $f(x)$ 在区间 $[0, m]$ 上单调递增,

则有 $2m - \frac{\pi}{6} \leq \frac{\pi}{2}$, 即 $m \leq \frac{\pi}{3}$.

所以 m 的最大值为 $\frac{\pi}{3}$.

.....13 分

(16) (共 13 分)

解: (I) 设 A 表示事件“从 2007 年至 2016 年随机选出 1 年, 该年体育产业年增加值比前一年的体育产业年增

由题意可知, 2009 年, 2011 年, 2015 年, 2016 年满足要求,

$$\text{故 } P(A) = \frac{4}{10} = \frac{2}{5}.$$

.....4 分

(II) 由题意可知, X 的所有可能取值为 0, 1, 2, 3, 且

$$P(X=0) = \frac{C_6^3}{C_{10}^3} = \frac{1}{6}; \quad P(X=1) = \frac{C_4^1 C_6^2}{C_{10}^3} = \frac{1}{2};$$

$$P(X=2) = \frac{C_4^2 C_6^1}{C_{10}^3} = \frac{3}{10}; \quad P(X=3) = \frac{C_4^3}{C_{10}^3} = \frac{1}{30}.$$

所以 X 的分布列为:

X	0	1	2	3
P	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{1}{30}$

$$\text{故 } X \text{ 的期望 } E(X) = 0 \times \frac{1}{6} + 1 \times \frac{1}{2} + 2 \times \frac{3}{10} + 3 \times \frac{1}{30} = \frac{6}{5}.$$

.....10 分

(III) 从 2008 年或 2009 年开始连续三年的体育产业年增长率方差最大.

从 2014 年开始连续三年的体育产业年增加值方差最大.

.....13 分

(17) (共 14 分)

解: (I) 连结 CO .

因为 C 在平面 A_1ABB_1 内的射影 O 为 AB_1 与 A_1B 的交点,

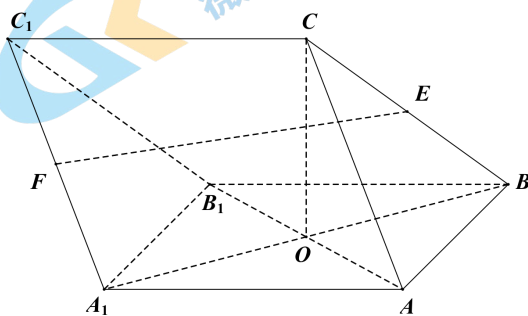
所以 $CO \perp$ 平面 A_1ABB_1 .

由已知三棱柱 $ABC - A_1B_1C_1$ 各棱长均相等,

所以 $AC = BC$, 且 A_1ABB_1 为菱形.

由勾股定理得 $OA = OB$, 即 $AB_1 = A_1B$.

所以四边形 A_1ABB_1 为正方形.5



分

(II) 由 (I) 知 $CO \perp$ 平面 A_1ABB_1 , $CO \perp OA$, $CO \perp OA_1$.

在正方形 A_1ABB_1 中, $OA_1 \perp OA$.

如图建立空间直角坐标系 $O - xyz$.

由题意得 $O(0,0,0)$, $A_1(\sqrt{2},0,0)$, $A(0,\sqrt{2},0)$, $B(-\sqrt{2},0,0)$, $C(0,0,\sqrt{2})$, $C_1(\sqrt{2},-\sqrt{2},\sqrt{2})$,

$$E(-\frac{\sqrt{2}}{2},0,\frac{\sqrt{2}}{2}), F(\frac{\sqrt{2}}{2},-\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2}).$$

所以 $\overrightarrow{A_1A} = (-\sqrt{2}, \sqrt{2}, 0)$, $\overrightarrow{AC} = (0, -\sqrt{2}, \sqrt{2})$.

设平面 A_1ACC_1 的法向量为 $\mathbf{m} = (x, y, z)$,

$$\text{则} \begin{cases} \mathbf{m} \cdot \overrightarrow{AA_1} = 0, \\ \mathbf{m} \cdot \overrightarrow{AC} = 0. \end{cases} \text{即} \begin{cases} -\sqrt{2}x + \sqrt{2}y = 0, \\ -\sqrt{2}y + \sqrt{2}z = 0. \end{cases}$$

令 $x = 1$, 则 $y = 1, z = 1$.

于是 $\mathbf{m} = (1, 1, 1)$.

又因为 $\overrightarrow{EF} = (\frac{3\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}, 0)$,

设直线 EF 与平面 A_1ACC_1 所成角为 θ , 则

$$\sin \theta = |\cos \langle \mathbf{m}, \overrightarrow{EF} \rangle| = \frac{|\mathbf{m} \cdot \overrightarrow{EF}|}{|\mathbf{m}| |\overrightarrow{EF}|} = \frac{\sqrt{30}}{15}.$$

所以直线 EF 与平面 A_1AC 所成角的正弦值为 $\frac{\sqrt{30}}{15}$10分

(III) 直线 EF 与平面 A_1CD 没有公共点, 即 $EF \parallel$ 平面 A_1CD .

设 D 点坐标为 $(0, y_0, 0)$, D 与 O 重合时不合题意, 所以 $y_0 \neq 0$.

因为 $\overrightarrow{A_1D} = (-\sqrt{2}, y_0, 0)$, $\overrightarrow{A_1C} = (-\sqrt{2}, 0, \sqrt{2})$.

设 $\mathbf{n} = (x_1, y_1, z_1)$ 为平面 A_1CD 的法向量,

$$\text{则} \begin{cases} \mathbf{n} \cdot \overrightarrow{A_1D} = 0, \\ \mathbf{n} \cdot \overrightarrow{A_1C} = 0. \end{cases} \text{即} \begin{cases} -\sqrt{2}x_1 + y_0y_1 = 0, \\ -\sqrt{2}x_1 + \sqrt{2}z_1 = 0. \end{cases}$$

令 $x_1 = 1$, 则 $y_1 = \frac{\sqrt{2}}{y_0}$, $z_1 = 1$.

于是 $\mathbf{n} = (1, \frac{\sqrt{2}}{y_0}, 1)$.

若 $EF \parallel$ 平面 A_1CD , $\vec{n} \cdot \overrightarrow{EF} = 0$.

又 $\overrightarrow{EF} = (\frac{3\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}, 0)$,

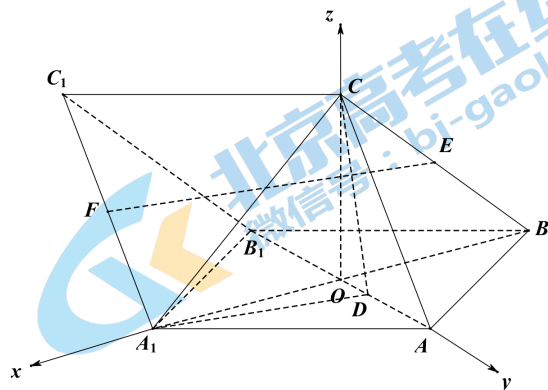
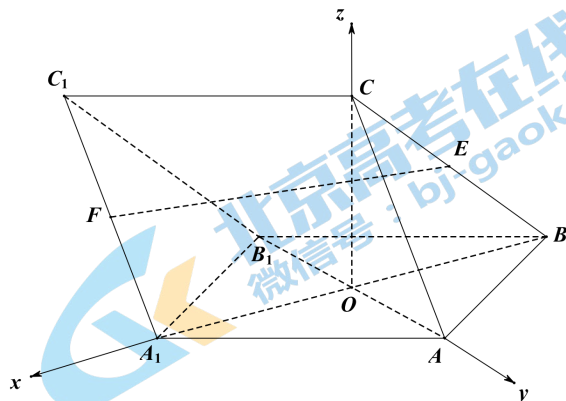
所以 $\frac{3\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{\sqrt{2}}{y_0} = 0$, 解得 $y_0 = \frac{\sqrt{2}}{3}$.

此时 $EF \not\subset$ 平面 A_1CD ,

所以 $AD = \frac{2\sqrt{2}}{3}$, $DB_1 = \frac{4\sqrt{2}}{3}$.

所以 $\frac{AD}{DB_1} = \frac{1}{2}$.

.....14分



(18) (共 13 分)

解: (I) $f(x)$ 定义域为 $(0, +\infty)$.

$$f'(x) = 2ax + (a-2) - \frac{1}{x} = \frac{2ax^2 + (a-2)x - 1}{x} = \frac{(2x+1)(ax-1)}{x}.$$

由已知, 得 $f'(1) = 0$, 解得 $a = 1$.

$$\text{当 } a = 1 \text{ 时, } f'(x) = \frac{(2x+1)(x-1)}{x},$$

当 $0 < x < 1$ 时, $f'(x) < 0$; 当 $x > 1$ 时, $f'(x) > 0$.

所以 $f(x)$ 的递减区间为 $(0, 1)$, 单调递增区间为 $(1, +\infty)$.

所以 $a = 1$ 时函数 $f(x)$ 在 $x = 1$ 处取得极小值.

即 $f'(x)$ 的极小值点为 1 时 a 的值为 1.

.....6 分

(II) 当 $0 < x_0 < 1$ 时, 曲线 $y = f(x)$ 上不存在点 P 位于 x 轴的下方, 理由如下:

$$\text{由 (I) 知 } f'(x) = \frac{(2x+1)(ax-1)}{x},$$

当 $a \leq 0$ 时, $f'(x) < 0$, 所以 $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 单调递减, $f(x)$ 不存在极小值点;

$$\text{当 } a > 0 \text{ 时, 令 } f'(x) = \frac{(2x+1)(ax-1)}{x} = 0, \text{ 得 } x = \frac{1}{a}.$$

当 $x \in (0, \frac{1}{a})$ 时, $f'(x) < 0$, $f(x)$ 在区间 $(0, \frac{1}{a})$ 上单调递减;

当 $x \in (\frac{1}{a}, +\infty)$ 时, $f'(x) > 0$, $f(x)$ 在区间 $(\frac{1}{a}, +\infty)$ 上单调递增.

所以 $f(\frac{1}{a}) = \ln a + 1 - \frac{1}{a}$ 是 $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上的最小值.

由已知, 若 $0 < x_0 < 1$, 则有 $0 < \frac{1}{a} < 1$, 即 $a > 1$.

当 $a > 1$ 时, $\ln a > 0$, 且 $0 < \frac{1}{a} < 1$, $1 - \frac{1}{a} > 0$.

所以 $f(\frac{1}{a}) > 0$.

当 $0 < x_0 < 1$ 时, 曲线 $y = f(x)$ 上所有的点均位于 x 轴的上方.

故当 $0 < x_0 < 1$ 时, 曲线 $y = f(x)$ 上不存在点 P 位于 x 轴的下方.

.....13 分

(19) (共 13 分)

解: (I) 因为 $m > 0$, 由椭圆方程知: $a^2 = 4m, b^2 = m, a = 2\sqrt{m}, b = \sqrt{m}$,

$$S_{\triangle BA_1A_2} = \frac{1}{2} \times 2ab = 2\sqrt{m} \cdot \sqrt{m} = 2m = 2, \text{ 所以 } m = 1.$$

$$\text{所以椭圆 } C \text{ 的方程为 } \frac{x^2}{4} + y^2 = 1.$$

$$\text{由 } a = 2, b = 1, a^2 = b^2 + c^2, \text{ 得 } c = \sqrt{3},$$

$$\text{所以椭圆 } C \text{ 的离心率为 } \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

.....5 分

(II) 设点 $P(x_p, y_p), P_1(x_0, y_0), P_2(x_0, -y_0) (x_0 > 0)$, 不妨设 $A_1(-2, 0), A_2(2, 0)$,

$$\text{设 } P_1A_1: y = \frac{y_0}{x_0+2}(x+2), P_2A_2: y = \frac{-y_0}{x_0-2}(x-2),$$

$$\text{由 } \begin{cases} y = \frac{y_0}{x_0+2}(x+2), \\ y = \frac{-y_0}{x_0-2}(x-2) \end{cases} \text{ 得 } \begin{cases} x_p = \frac{4}{x_0}, \\ y_p = \frac{2y_0}{x_0}. \end{cases}$$

$$\text{即 } \begin{cases} x_0 = \frac{4}{x_p}, \\ y_0 = \frac{x_0 y_p}{2} = \frac{\frac{4}{x_p} y_p}{2} = \frac{2y_p}{x_p}. \end{cases}$$

$$\text{又 } \frac{x_0^2}{4} + y_0^2 = 1, \text{ 得 } \frac{(\frac{4}{x_p})^2}{4} + \frac{4y_p^2}{x_p^2} = 1,$$

$$\text{化简得 } \frac{x_p^2}{4} - y_p^2 = 1 (x_p > 0).$$

$$\text{因为 } A_1(-2, 0), B(0, 1), \text{ 所以 } |A_1B| = \sqrt{5}, \text{ 即 } M(-\sqrt{5}, 0), N(\sqrt{5}, 0).$$

$$\text{所以点 } P \text{ 的轨迹为双曲线 } \frac{x^2}{4} - y^2 = 1 \text{ 的右支, } M, N \text{ 两点恰为其焦点, } A_1, A_2 \text{ 为双曲线的顶点, 且 } |A_1A_2| = 4,$$

$$\text{所以 } |PM| - |PN| = 4.$$

.....13 分

(20) (共 14 分)

解: (I) $c_1=2 \quad c_2=1 \quad c_3=2 \quad c_4=1.$

.....3 分

官方微信公众号: bj-gaokao

咨询热线: 010-5751 5980

官方网站: www.gaokzx.com

微信客服: gaokzx2018

(II) 由于对任意的正整数 $k(1 \leq k \leq L)$, 存在 A 中的项 a_m , 使得 $a_m = k$. 所以 $c_1, c_2, \dots, c_L$ 均不为零.

必要性: 若 $t(a_i) = a_i (1 \leq i \leq n)$, 由于 $t(k) = L \cdot \frac{c_1 + c_2 + \dots + c_L + c_k}{n}$,

所以有 $t(1) = L \cdot \frac{c_1}{n} = 1$; $t(2) = L \cdot \frac{c_1 + c_2}{n} = 2$; $t(3) = L \cdot \frac{c_1 + c_2 + c_3}{n} = 3$; $\dots$; $t(L) = L \cdot \frac{c_1 + c_2 + \dots + c_L}{n} = L$.

通过解此方程组, 可得 $c_i = c_j (i, j = 1, 2, \dots, L)$ 成立.

充分性: 若 $c_i = c_j (i, j = 1, 2, \dots, L)$ 成立, 不妨设 $h = c_i = c_j (i, j = 1, 2, \dots, L)$, 可以得到 $h \cdot L = n$.

所以有: $t(1) = L \cdot \frac{h}{n} = 1$; $t(2) = L \cdot \frac{2h}{n} = 2$; $t(3) = L \cdot \frac{3h}{n} = 3$; $\dots$; $t(L) = L \cdot \frac{Lh}{n} = L$.

所以 $t(a_i) = a_i (1 \leq i \leq n)$ 成立.

.....9分

(III) 设 $A: a_1, a_2, \dots, a_n$ 的所有不同取值为 $u_1, u_2, \dots, u_m$, 且满足: $u_1 < u_2 < \dots < u_m$.

不妨设 $A: u_{11}, u_{12}, \dots, u_{1r_1}, u_{21}, u_{22}, \dots, u_{2r_2}, \dots, u_{m1}, u_{m2}, \dots, u_{mr_m}$,

其中 $u_{11} = u_{12} = \dots = u_{1r_1} = u_1$; $u_{21} = u_{22} = \dots = u_{2r_2} = u_2$; $\dots$; $u_{m1} = u_{m2} = \dots = u_{mr_m} = u_m$.

又因为 $L = n$, 根据变换 T 有: $t(u_{11}) = t(u_{12}) = \dots = t(u_{1r_1}) = t(u_1) = L \cdot \frac{c_{u_1}}{n} = r_1$;

$t(u_{21}) = t(u_{22}) = \dots = t(u_{2r_2}) = t(u_2) = L \cdot \frac{c_{u_1} + c_{u_2}}{n} = r_1 + r_2$; $\dots$;

$t(u_{m1}) = t(u_{m2}) = \dots = t(u_{mr_m}) = t(u_m) = L \cdot \frac{c_{u_1} + c_{u_2} + \dots + c_{u_m}}{n} = r_1 + r_2 + \dots + r_m = L$;

所以 $T(A): \underbrace{t(u_{11}), t(u_{12}), \dots, t(u_{1r_1})}_{r_1 \uparrow}, \underbrace{t(u_{21}), t(u_{22}), \dots, t(u_{2r_2})}_{r_2 \uparrow}, \dots, \underbrace{t(u_{m1}), t(u_{m2}), \dots, t(u_{mr_m})}_{r_m \uparrow}$.

即 $T(A): \underbrace{r_1, r_1, \dots, r_1}_{r_1 \uparrow}, \underbrace{r_1 + r_2, r_1 + r_2, \dots, r_1 + r_2}_{r_2 \uparrow}, \dots, \underbrace{L, L, \dots, L}_{r_m \uparrow}$.

所以 $T(T(A)): \underbrace{t(r_1), t(r_1), \dots, t(r_1)}_{r_1 \uparrow}, \underbrace{t(r_1 + r_2), t(r_1 + r_2), \dots, t(r_1 + r_2)}_{r_2 \uparrow}, \dots, \underbrace{t(L), t(L), \dots, t(L)}_{r_m \uparrow}$.

因为 $r_1 < r_1 + r_2 < \dots < r_1 + r_2 + \dots + r_m$,

所以有 $t(r_1) = r_1, t(r_1 + r_2) = r_1 + r_2, \dots, t(r_1 + r_2 + \dots + r_m) = L$.

因此, $b_1 = b_2 = \dots = b_{r_1} = r_1, b_{r_1+1} = b_{r_1+2} = \dots = b_{r_1+r_2} = r_1 + r_2, \dots$,

$b_{r_1+r_2+\dots+r_{m-1}+1} = b_{r_1+r_2+\dots+r_{m-1}+2} = \dots = b_n = r_1 + r_2 + \dots + r_m = L$

即 $T(T(A)): \underbrace{r_1, r_1, \dots, r_1}_{r_1 \uparrow}, \underbrace{r_1 + r_2, r_1 + r_2, \dots, r_1 + r_2}_{r_2 \uparrow}, \dots, \underbrace{L, L, \dots, L}_{r_m \uparrow}$.

从而 $b_i = t(a_i) (i = 1, 2, \dots, n)$.

因此结论成立.

.....14分