2019 北京海淀区高三一模

数　　学（文）

2019.4

本试卷共 4 页，150 分。考试时长 120 分钟。考生务必将答案答在答题纸上，在试卷上作答无效。考试结束后，将本试卷和答题纸一并交回。

第一部分（选择题共 40 分）

一、选择题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分。在每小题列出的四个选项中，选出符合题国要求的一项。

(1) 已知集合 $P=\{x|0\le x\le 2\}$，且 $M\subseteq P$，则 M 可以是

(A) $\{0,1\}$　(B) $\{1,3\}$　(C) $\{-1,1\}$　(D) $\{0,5\}$

(2) 若 x_0 是函数 $f(x)=\log_2 x-\dfrac{1}{x}$ 的零点，则

(A) $-1<x_0<0$　(B) $0<x_0<1$　(C) $1<x_0<2$　(D) $2<x_0<4$

(3 若角 α 的终边在第二象限，则下列三角函数值中大于零的是

(A) $\sin(\alpha+\dfrac{\pi}{2})$　(B) $\cos(\alpha+\dfrac{\pi}{2})$　(C) $\sin(\pi+\alpha)$　(D) $\cos(\pi+\alpha)$

(4) 已知 $a<b$，则下列结论中正确的是

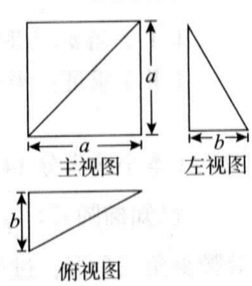
(A) $\forall c<0, a>b+c$　(B) $\forall c<0, a<b+c$

(C) $\exists c>0, a>b+c$　(D) $\exists c>0, a<b+c$

(5) 抛物线 $W: y^2=4x$ 的焦点为 F，点 A 在抛物线形上，且点 A 到直线 $x=-3$ 的距离是线段 AF 长度的 2 倍，则线段 AF 的长度为

(A) 1　(B) 2　(C) 3　(D) 4

(6) 某四棱锥的三视图如图所示，其中 $a+b=1$，且 $a>b$. 若四个侧面的面积中最小的为 $\dfrac{1}{9}$ 则以的值为



(A) $\dfrac{1}{2}$　(B) $\dfrac{2}{3}$

(C) $\dfrac{3}{4}$　(D) $\dfrac{5}{6}$

(7) 设 $\{a_n\}$ 是公比为 q 的等比数列，且 $a_1>1$，则“$a_n>1$ 对任意 $n\in N^*$”成立”是“$q\ge 1$”的

(A) 充分而不必要条件　(B) 必要而不充分条件

(C) 充分必要条件　(D) 既不充分也不必要条件

(8) 某校实行选科走班制度，张毅同学的选择是地理、生物、政治这三科，且生物在 B 层班级．该校周一上午选科走班的课程安排如下表所示，张毅选择三个科目的课各上一节，另外一节上自习，则他不同的选课方法的种数为

第一节	第二节	第三节	第四节
地理1班	化学A层3班	地理2班	化学A层4班
生物A层1班	化学B层2班	生物B层2班	历史B层1班
物理A层1班	生物A层3班	物理A层2班	生物A层4班
物理B层2班	生物B层1班	物理B层1班	物理A层4班
政治1班	物理A层3班	政治2班	政治3班

(A)4　　　(B)5　　(C)6　　　(D)7

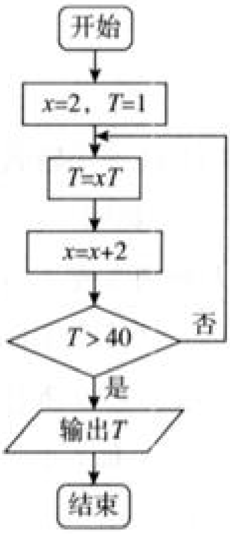
第二部分（非选择题　共 110 分）

二、填空题共 6 小题，每小题 5 分，共 30 分。

(9)已知 i 是虚数单位，若 $(1-i)(a+i)=2$，$a\in R$，则 $a=$

(10) 在△ABC 中，$a=4,b=5,\cos C=\frac{1}{8}$，则 $c=$___，$S_{\Delta ABC}=$

(11)执行如图所示的程序框图，则输出的 T 值为



(12)) 已知向量 a=(1,-2),同时满足条件①a∥b,②|a + b| < |a|的一个向量 b 的坐标为

____________ (13)已知椭圆 $C_1:\frac{x^2}{4}+y^2=1$ 和双曲线 $C_2:\frac{x^2}{m^2}-y^2=1(m>0)$．经过 C_1 的左顶点 A 和上顶点 B 的直线与 C_2 的渐近线在第一象限的交点为 P，且 $|AB|=|BP|$，则椭圆 C_1 的离心率 $e_1=$______，双曲线 C_2 的离心率 $e_2=$

(14) 设关于 x,y 的不等式组 $\begin{cases}x\ge 0,\\ y\ge 0,\\ y\ge kx+1\end{cases}$ 表示的平面区域为 Ω．记区域 Ω 上的点与点 $A(0,-1)$ 距离的最小值为 $d(k)$，则

(I)当 k=1时，$d(1)$= ____;

(II)若 $d(k)\ge 2$，则 k 的取值范围是____.

三、解答题共 6 小题，共 80 分。解答应写出文字说明、演算步骤或证明过程。

(15)（本小题满分 13 分）

已知等差数列 $\{a_n\}$ 的公差 $d=2$，且 $a_2+a_5=2$，$\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n．

(I) 求 $\{a_n\}$ 的通项公式;

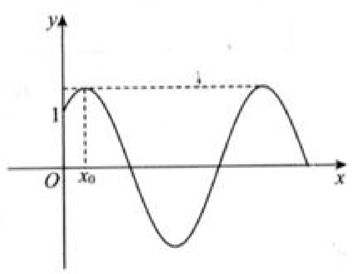
(II)若 S_m,a_9,a_{15} 成等比数列，求 m 的值.

(16)（本小题满分 13 分）

已知函数 $f(x)=2\sqrt{2}\cos(\frac{\pi}{4}-x)\cos x+a$ 的图象经过点 $(0,1)$，部分图象如图所示．

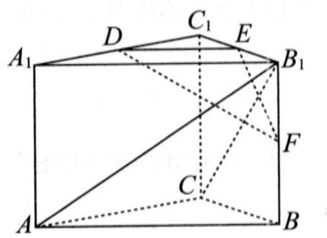
(I)求 a 的值；

(II)求图中 x_0 的值，并直接写出函数 $f(x)$ 的单调递增区间．



(17)（本小题满分 14 分）

如图，在三棱柱 ABC 中，$CC_1\perp$ 平面 $ABC-A_1B_1C_1$，$AC\perp BC, AC=BC=CC_1=2$，点 D,E,F 分别为棱 A_1C_1,B_1C_1,BB_1 的中点．



(II)求证：AB // 平面 DEF

(II)求证：平面 $ACB_1\perp$ 平面 DEF；

(III)求三棱锥 $E-ACB_1$ 的体积．

(18)（本小题满分 13 分）

据《人民网》报道，“美国国家航空航天局(NASA)发文称，相比 20 年前世界变得更绿色了，卫星资料显示中国和印度的行动主导了地球变绿．”据统计，中国新增绿化面积的 420/0 来自于植树造林，下表是中国十个地区在 2017 年植树造林的相关数据．（造林总面积为人工造林、飞播造林、新封山育林、退化林修复、人工更新的面积之和）

单位：公顷

地区	造林总面积	按造林方式分				
		人工造林	飞播造林	新封山育林	退化林修复	人工更新
内蒙	618484	311052	74094	136006	90382	6950
河北	583361	345625	33333	135107	65653	3643
河南	149002	97647	13429	221117	15376	133
重庆	226333	100600		、 62400	63333	
陕西	297642	184108	33602	63865	16067	

甘肃	325580	260144		57438	7998	
新疆	263903	118105	6264	126647	10796	2091
青海	178414	16051		159734	2629	
宁夏	91531	58960		22938	8298	1335
北京	19064	10012、		4000	3999	1053

(II)请根据上述数据，分别写出在这十个地区中人工造林面积与造林总面积的比值最大和最小的地区；

(II)在这十个地区中，任选一个地区，求该地区人工造林面积与造林总面积的比值不足50%的概率是多少？

(III)从上表新封山育林面积超过十万公顷的地区中，任选两个地区，求至少有一个地区退化林修复面积超过五万公顷的概率.

(19)（本小题满分 13 分）

已知函数 $f(x)=\frac{1}{3}x^3-\frac{5}{2}x^2+a|x|-1$.

(I)当 $a=6$ 时，求函数 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上的单调区间；

(II)求证：当 $a<0$ 时，函数 $f(x)$ 既有极大值又有极小值.

(20)（本小题满分 14 分）

已知椭圆 $C:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的左顶点为 $A(-2,0)$，两个焦点与短轴一个顶点构成等腰直角三角形，过点 $P(1,0)$ 且与 x 轴不重合的直线 l 与椭圆交于 M,N 不同的两点.

(I)求椭圆 P 的方程；

(II)当 AM 与 MN 垂直时，求 AM 的长；

(III)若过点 P 且平行于 AM 的直线交直线 $x=\frac{5}{2}$ 于点 Q，求证：直线 NQ 恒过定点.

数学试题答案

一、选择题：本大题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分.

1. A　2. C　3. D　4. D　5.B　6. B　7. C　8. B

二、填空题:本大题共 6 小题，每小题 5 分，共 30 分.

9. 1　　10. 6, $\frac{15\sqrt{7}}{4}$　　11. 48

12. $(-1,2)$（答案不唯一）　13. $\frac{\sqrt{3}}{2}$, $\sqrt{2}$　　14. 2, $[0,+\infty)$

三、解答题：本大题共 6 小题，共 80 分.

15.（共 13 分）

解：（I）因为 $a_5+a_2=2$， $d=2$

所以 $2a_1+5d=2a_1+10=2$，

所以 $a_1=-4$

所以 $a_n=2n-6$

（II） $S_m=\frac{(a_1+a_m)m}{2}=m^2-5m$

又 $a_9=12$， $a_{15}=24$

因为 S_m,a_9,a_{15} 是等比数列，

所以 $(a_9)^2=S_m a_{15}$

所以 $m^2-5m-6=0$

$m=6, m=-1$

因为 $m\in\mathbf{N}^*$ ，所以 $m=6$

16.（共 13 分）

解：（Ⅰ） $f(0)=2\sqrt{2}\sin(\frac{\pi}{4})\cos 0+a=1$

$2\sqrt{2}\cdot\dfrac{\sqrt{2}}{2}+a=1$

所以 $a=-1$

（II） $f(x)=2\sqrt{2}\cos(\dfrac{\pi}{4}-x)\cos x-1$

$=(2\sin x+2\cos x)\cos x-1$

$=2\sin x\cos x+2\cos^2 x-1$

$=\sin 2x+\cos 2x$

$=\sqrt{2}\sin(2x+\dfrac{\pi}{4})$

由图象得 $2x_0+\dfrac{\pi}{4}=\dfrac{\pi}{2}$

所以 $x_0=\dfrac{\pi}{8}$

函数 $f(x)$ 的单调增区间为 $(k\pi-\dfrac{3}{8}\pi,k\pi+\dfrac{1}{8}\pi)$， $k\in\mathbf{Z}$

17.（共 14 分）

解：（I）证明：因为三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中， $A_1B_1 \parallel AB$

又因为 D,E 分别为 A_1C_1,B_1C_1 的中点，所以 $DE \parallel A_1B_1$

于是 $DE \parallel AB$

$AB\not\subset$ 平面 DEF， $DE\subset$ 平面 DEF

所以 $AB \parallel$ 平面 DEF

（II）在三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中，

$CC_1\perp$ 平面 ABC， $AC\subset$ 平面 ABC， $BC\subset$ 平面 ABC

所以 $CC_1\perp AC$， $CC_1\perp BC$

又 $AC\perp BC$

$BC\cap CC_1=C$， $BC,CC_1\subset$ 平面 BCC_1B_1

所以 $AC \perp$ 平面 BCC_1B_1

$EF \subset$ 平面 BCC_1B_1

所以 $AC \perp EF$

又因为 $BC = CC_1 = 2$， $CC_1 \perp BC$，

所以侧面 BCC_1B_1 为正方形，故 $BC_1 \perp CB_1$

而 E, F 分别为 B_1C_1, BB_1 的中点，连结 BC_1，所以 $EF \parallel BC_1$

所以 $EF \perp CB_1$ ，又 $AC \cap CB_1 = C$， $AC, CB_1 \subset$ 平面 ACB_1

所以 $EF \perp$ 平面 ACB_1

又 $EF \subset$ 平面 DEF

所以平面 $ACB_1 \perp$ 平面 DEF

（III） $V_{E-ACB_1} = V_{A-ECB_1} = \dfrac{1}{3} S_{\Delta ECB_1} \cdot AC = \dfrac{2}{3}$

18.（共 13 分）

解：（I）人工造林面积与造林总面积比最大的地区为甘肃省，

人工造林面积占造林总面积比最小的地区为青海省

（II）设在这十个地区中, 任选一个地区，该地区人工造林面积占总面积的比比不足 50% 为

事件 A

在十个地区中，有 3 个地区（重庆、新疆、青海）人工造林面积占总面积比不足 50%，

则 $P(A) = \dfrac{3}{10}$

（III）设至少有一个地区退化林修复面积超过五万公顷为事件 B

新封山育林面积超过十万公顷有 4 个地区：内蒙、河北、新疆、青海，分别设为

a_1, a_2, a_3, a_4，其中退化林修复面积超过五万公顷有 2 个地区：内蒙、河北即 a_1, a_2

从 4 个地区中任取 2 个地区共有 6 种情况，

$(a_1, a_2), (a_1, a_3), (a_1, a_4), (a_2, a_3), (a_2, a_4), (a_3, a_4)$

其中至少有一个地区退化林修复面积超过五万公顷共有 5 种情况，

$(a_1,a_2),(a_1,a_3),(a_1,a_4),(a_2,a_3),(a_2,a_4)$

则 $P(B)=\frac{5}{6}$

19. （共 13 分）

解：（Ⅰ）当 $a=6,\quad x>0$ 时，$f(x)=\frac{1}{3}x^3-\frac{5}{2}x^2+6x-1$

所以 $f'(x)=x^2-5x+6=(x-2)(x-3)$，

令 $f'(x)=0,$ 得 $x=2$，或 $x=3$.

当 x 变化时，$f'(x),f(x)$ 的变化情况如下表：

x	$(0,2)$	2	$(2,3)$	3	$(3,+\infty)$
$f'(x)$	+	0	−	0	+
$f(x)$	↗	极大值	↘	极小值	↗

所以 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上的单调递增区间是 $(0,2)$，$(3,+\infty)$，单调递减区间是 $(2,3)$

（Ⅱ）当 $a<0$ 时，

若 $x<0$，则 $f(x)=\frac{1}{3}x^3-\frac{5}{2}x^2-ax-1$，

所以 $f'(x)=x^2-5x-a=x(x-5)-a$

因为 $x<0,a<0$，所以 $f'(x)>0$

若 $x>0$，则 $f(x)=\frac{1}{3}x^3-\frac{5}{2}x^2+ax-1$，

所以 $f'(x)=x^2-5x+a$

令 $f'(x)=0,\quad \Delta=25-4a>0$，

所以有两个不相等的实根 x_1,x_2，且 $x_1x_2<0$

不妨设 $x_2>0$，所以当 x 变化时，$f'(x),f(x)$ 的变化情况如下表：

x	$(-\infty,0)$	0	$(0,x_2)$	x_2	$(x_2,+\infty)$
$f'(x)$	+	无定义	−	0	+
$f(x)$	↗	极大值	↘	极小值	↗

因为函数 $f(x)$ 图象是连续不断的，

所以当 $a<0$ 时，$f(x)$ 即存在极大值又有极小值

20．（共 13 分）

解：（Ⅰ）因为 $A(-2,0)$，所以 $a=2$

因为两个焦点与短轴一个顶点构成等腰直角三角形，

所以 $b=c$

又 $b^2+c^2=a^2$

所以 $b=c=\sqrt{2}$ ，

所以椭圆方程为 $\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{2}=1$

（Ⅱ）**方法一：**

设 $M(x_m,y_m)$

$k_{MP}=\dfrac{y_m}{x_m-1}$，$k_{AM}=\dfrac{y_m}{x_m+2}$

$k_{AM}\cdot k_{MP}=-1$

$$\begin{cases}\dfrac{y_m}{x_m-1}\cdot\dfrac{y_m}{x_m+2}=-1\\ \dfrac{{x_m}^2}{4}+\dfrac{{y_m}^2}{2}=1\end{cases}$$

$\begin{cases}x_m=0\\ y_m=\pm\sqrt{2}\end{cases}$，$\begin{cases}x_m=-2\\ y_m=0\end{cases}$（舍）

所以 $|AM|=\sqrt{6}$

方法二：

设 $M(x_m,y_m)$，

因为 AM 与 MN 垂直，

所以点 M 在以 AP 为直径的圆上，

又以 AP 为直径的圆的圆心为 $(-\frac{1}{2},0)$，半径为 $\frac{3}{2}$，方程为 $(x+\frac{1}{2})^2+y^2=\frac{9}{4}$

$$\begin{cases}(x_m+\frac{1}{2})^2+y_m{}^2=\frac{9}{4}\\ \frac{x_m{}^2}{4}+\frac{y_m{}^2}{2}=1\end{cases},$$

$$\begin{cases}x_m=0\\ y_m=\pm\sqrt{2}\end{cases}, \quad \begin{cases}x_m=-2\\ y_m=0\end{cases} \text{（舍）}$$

所以 $|AM|=\sqrt{6}$

方法三：

设直线 AM 的斜率为 k，$l_{AM}:y=k(x+2)$，其中 $k\neq 0$

$$\begin{cases}y=k(x+2)\\ \frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{2}=1\end{cases}$$

化简得 $(1+2k^2)x^2+8k^2x+8k^2-4=0$

当 $\Delta>0$ 时，$x_A\cdot x_M=\frac{8k^2-4}{1+2k^2}$

得 $x_M=\frac{2-4k^2}{1+2k^2}$，$y_M=\frac{4k}{2k^2+1}$

显然直线 AM,MN 存在斜率且斜率不为 0.

因为 AM 与 MN 垂直，

所以 $k_{MP}=\frac{\frac{4k}{2k^2+1}}{\frac{2-4k^2}{1+2k^2}-1}==-\frac{1}{k}$

得 $k^2=\frac{1}{2}$，$k=\pm\frac{\sqrt{2}}{2}$，$x_M=0$

所以 $|AM|=\sqrt{1+k^2}\,|x_M+2|=\sqrt{6}$

（III）直线 NQ 恒过定点 $(2,0)$

设 $M(x_1,y_1)$， $N(x_2,y_2)$，

由题意，设直线 MN 的方程为 $x=my+1$，

由 $\begin{cases} x=my+1, \\ x^2+2y^2-4=0 \end{cases}$ 得 $(m^2+2)y^2+2my-3=0$，

显然， $\Delta>0$，则 $y_1+y_2=\dfrac{-2m}{m^2+2}$， $y_1y_2=\dfrac{-3}{m^2+2}$，

因为直线 PQ 与 AM 平行，所以 $k_{PQ}=k_{AM}=\dfrac{y_1}{x_1+2}$，

则 PQ 的直线方程为 $y=\dfrac{y_1}{x_1+2}(x-1)$，

令 $x=\dfrac{5}{2}$， 则 $y=\dfrac{\frac{3}{2}y_1}{x_1+2}=\dfrac{3y_1}{2(my_1+3)}$， 即 $Q(\dfrac{5}{2},\dfrac{3y_1}{2(my_1+3)})$

$$k_{NQ}=\frac{y_2-\dfrac{3y_1}{2(my_1+3)}}{x_2-\dfrac{5}{2}}=\frac{2my_1y_2+6y_2-3y_1}{(my_1+3)(2my_2-3)},$$

直线 NQ 的方程为 $y-y_2=\dfrac{2my_1y_2+6y_2-3y_1}{2m^2y_1y_2+6my_2-3my_1-9}(x-x_2)$

$$y=\frac{2my_1y_2+6y_2-3y_1}{2m^2y_1y_2+6my_2-3my_1-9}x-\frac{(2my_1y_2+6y_2-3y_1)(my_2+1)}{2m^2y_1y_2+6my_2-3my_1-9}+y_2$$

$$=\frac{2my_1y_2+6y_2-3y_1}{2m^2y_1y_2+6my_2-3my_1-9}x-\frac{2my_1y_2+15y_2-3y_1}{2m^2y_1y_2+6my_2-3my_1-9}$$

令 $y=0$，得 $x=\dfrac{2my_1y_2+15y_2-3y_1}{2my_1y_2+6y_2-3y_1}$

因为 $2my_1y_2=3(y_1+y_2)$， 故 $x=\dfrac{18y_2}{9y_2}=2$，

所以直线 NQ 恒过定点 $(2,0)$.