

## 初三数学

2024.01

考生须知

1. 本试卷共 6 页,共三道大题,28 道小题,满分 100 分,考试时间 120 分钟。
2. 在答题卡上准确填写学校名称、准考证号,并将条形码贴在指定区域。
3. 题目答案一律填涂或书写在答题卡上,在试卷上作答无效。
4. 在答题卡上,选择题、作图题用 2B 铅笔作答,其他试题用黑色字迹签字笔作答。
5. 考试结束,请将答题卡交回。

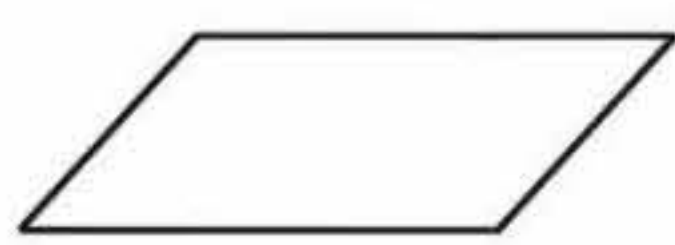
## 一、选择题(共 16 分,每题 2 分)

第 1-8 题均有四个选项,符合题意的选项只有一个.

1. 2023 航空航天大兴论坛于 11 月 15 日至 17 日在北京大兴国际机场临空经济区举办,共设置了“数字民航”“电动航空”“商业航天”“通航维修”四场专题论坛.若某位航天科研工作者随机选择一个专题论坛参与活动,则他选中“电动航空”的概率是

A. 1                      B.  $\frac{1}{2}$                       C.  $\frac{1}{4}$                       D.  $\frac{1}{8}$

2. 下列图形中,是中心对称图形而不是轴对称图形的为



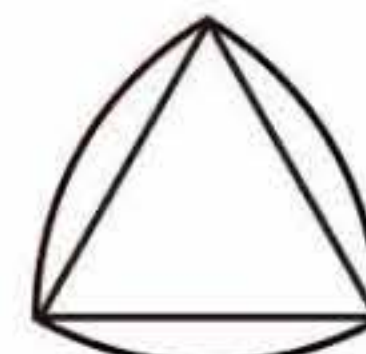
A.



B.



C.



D.

3. 关于一元二次方程  $x^2-3x-1=0$  的根的情况,下列说法正确的是

A. 有两个不相等的实数根                      B. 有两个相等的实数根  
C. 没有实数根                                      D. 无法判断

4. 抛物线  $y=(x-2)^2+1$  的对称轴是

A.  $x=-2$                       B.  $x=2$                       C.  $x=-1$                       D.  $x=1$

5. 在平面直角坐标系  $xOy$  中,将抛物线  $y=3x^2$  先向右平移 4 个单位长度,再向上平移 1 个单位长度,得到的抛物线是

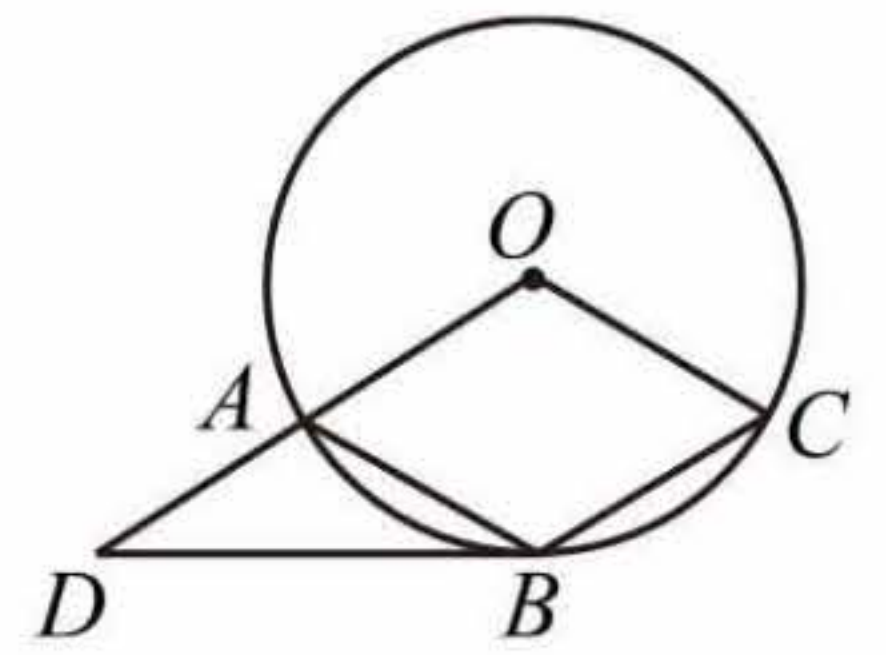
A.  $y=3(x+4)^2-1$                       B.  $y=3(x+4)^2+1$                       C.  $y=3(x-4)^2-1$                       D.  $y=3(x-4)^2+1$



6. 若圆的半径为 1, 则  $60^\circ$  的圆心角所对的弧长为

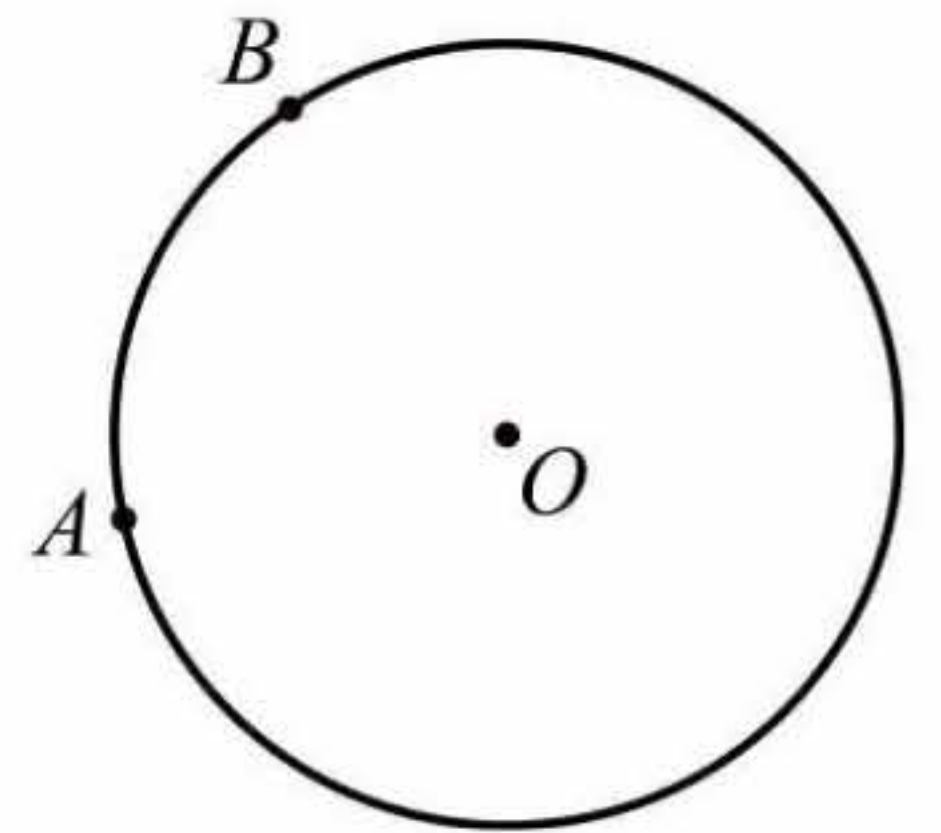
- A.  $\frac{\pi}{2}$                       B.  $\pi$                       C.  $\frac{\pi}{6}$                       D.  $\frac{\pi}{3}$

7. 如图, 菱形  $OABC$  的顶点  $A, B, C$  在  $\odot O$  上, 过点  $B$  作  $\odot O$  的切线交  $OA$  的延长线于点  $D$ . 若  $\odot O$  的半径为 2, 则  $BD$  的长为



- A. 2                      B.  $2\sqrt{2}$   
C.  $2\sqrt{3}$                       D. 4

8. 如图, 点  $A, B$  在  $\odot O$  上, 且点  $A, O, B$  不在同一条直线上, 点  $P$  是  $\odot O$  上一个动点 (点  $P$  不与点  $A, B$  重合), 在点  $P$  运动的过程中, 有如下四个结论:



- ①恰好存在一点  $P$ , 使得  $\angle PAB = 90^\circ$ ;  
②若直线  $OP$  垂直于  $AB$ , 则  $\angle OAP = \angle OBP$ ;  
③  $\angle APB$  的大小始终不变.

上述结论中, 所有正确结论的序号是

- A. ①②                      B. ①③                      C. ②③                      D. ①②③

二、填空题 (共 16 分, 每题 2 分)

9. 若  $(a-3)x^2 - 3x - 4 = 0$  是关于  $x$  的一元二次方程, 则  $a$  的取值范围是\_\_\_\_\_.

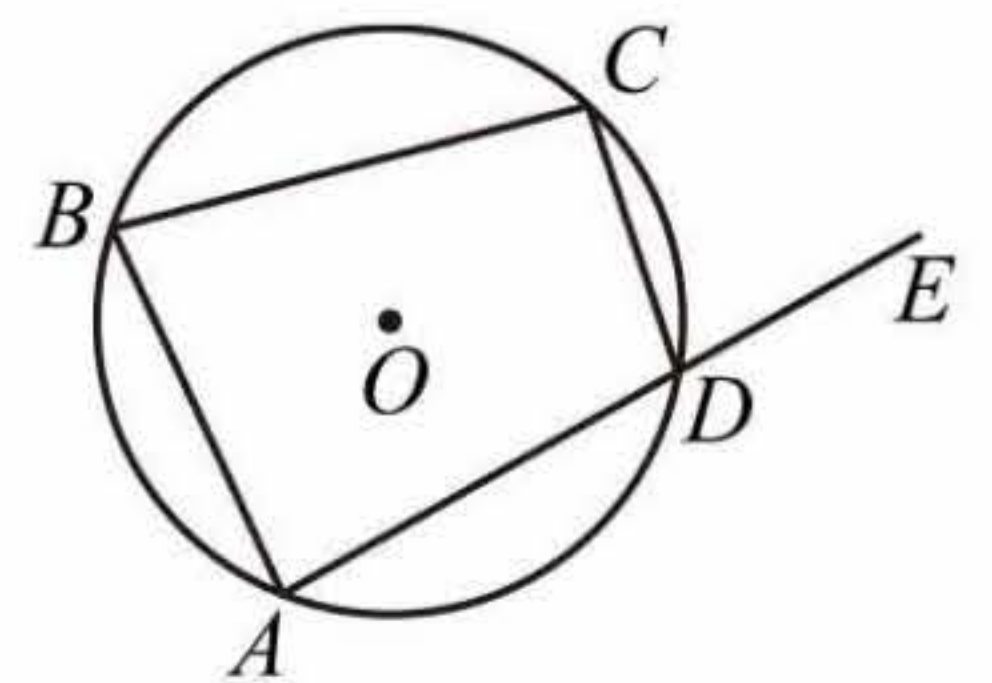
10. 若关于  $x$  的一元二次方程  $x^2 - 3x + m = 0$  有一个根为 1, 则  $m$  的值为\_\_\_\_\_.

11. 在平面直角坐标系  $xOy$  中, 若点  $(2, y_1), (4, y_2)$  在抛物线  $y = 2(x-3)^2 - 4$  上,

则  $y_1$  \_\_\_\_\_  $y_2$  (填“>”, “=”或“<”).

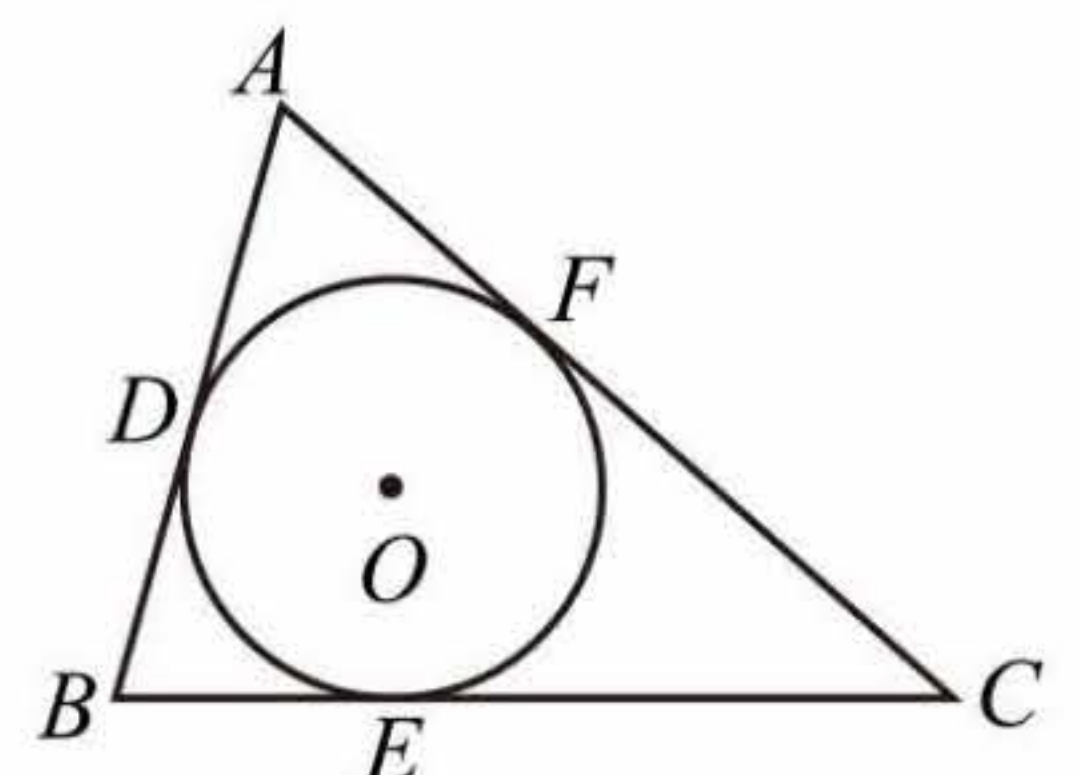
12. 如图, 四边形  $ABCD$  内接于  $\odot O$ , 点  $E$  在  $AD$  的延长线上,

若  $\angle CDE = 80^\circ$ , 则  $\angle ABC$  的度数是\_\_\_\_\_°.



13. 如图,  $\triangle ABC$  的内切圆  $\odot O$  与  $AB, BC, CA$  分别相切于点  $D, E, F$ ,

若  $AD = 2, BC = 6$ , 则  $\triangle ABC$  的周长为\_\_\_\_\_.





14. 写出一个过点 $(0,1)$ 且当自变量 $x>0$ 时,函数值 $y$ 随 $x$ 的增大而增大的二次函数的解析式\_\_\_\_\_.

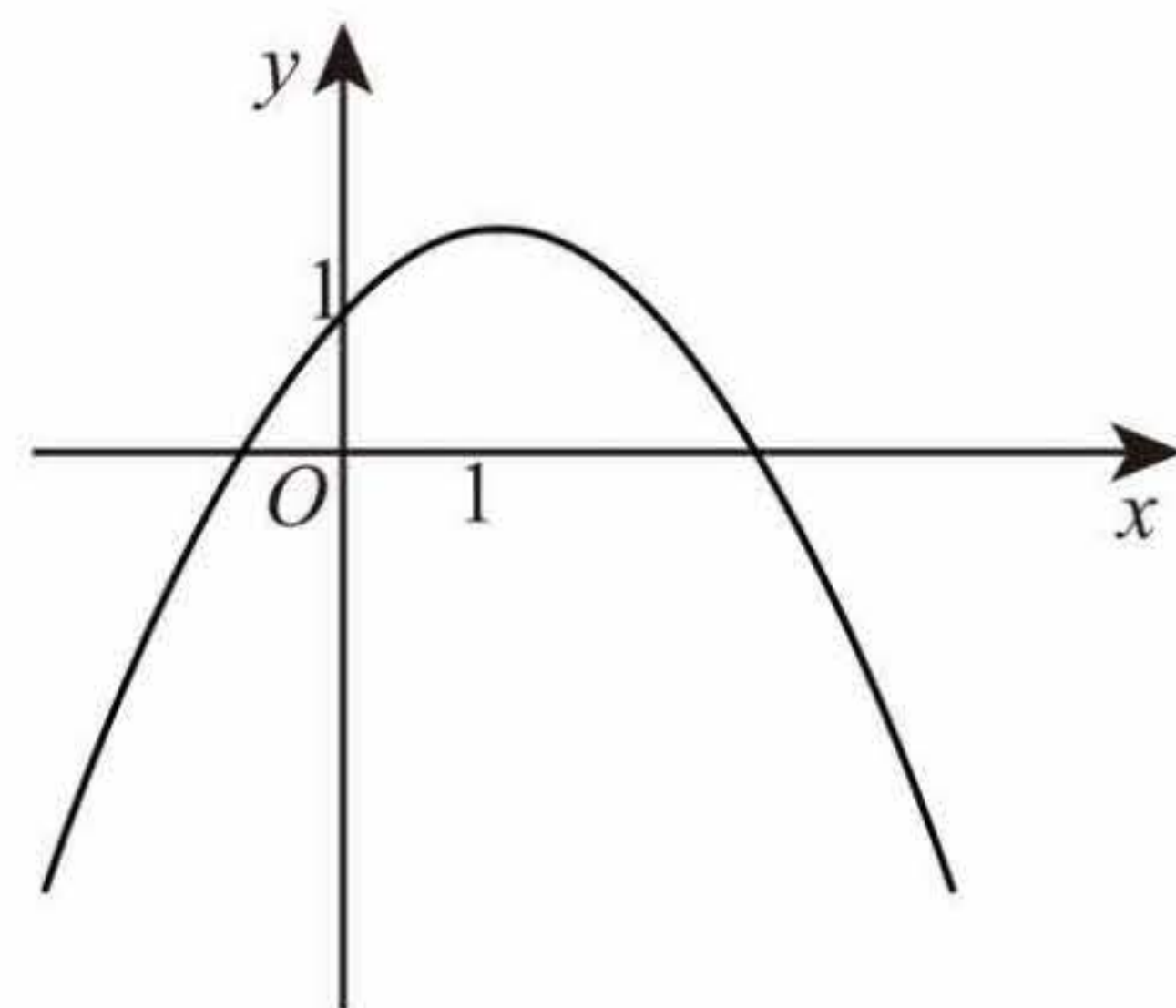
15. 杭州亚运会的吉祥物“琮琤”“宸宸”“莲莲”组合名为“江南忆”,出自唐朝诗人白居易的名句“江南忆,最忆是杭州”,它融合了杭州的历史人文、自然生态和创新基因.吉祥物一开售,就深受大家的喜爱.经统计,某商店吉祥物“江南忆”6月份的销售量为1200件,8月份的销售量为1452件,设吉祥物“江南忆”6月份到8月份销售量的月平均增长率为 $x$ ,则可列方程为\_\_\_\_\_.

16. 如图,在平面直角坐标系 $xOy$ 中,二次函数 $y = ax^2 + bx + c$  ( $a < 0$ )的图象经过点 $(0,1)$ ,  $(2,1)$ . 给出下面三个结论:

① $2a - b = 0$ ;

② $a + b + c > 1$ ;

③关于 $x$ 的一元二次方程 $ax^2 + bx + c - m = 0$  ( $m < 1$ )有两个异号实数根.



上述结论中,所有正确结论的序号是\_\_\_\_\_.

三、解答题(共68分,第17-21题每题5分,第22题6分,第23题5分,第24-26题每题6分,第27-28题,每题7分)解答应写出文字说明、演算步骤或证明的过程.

17. 解方程: $x^2 + 8x = 9$ .

18. 已知 $a$ 是方程 $x^2 - 2x - 1 = 0$ 的一个根,求代数式 $(a-1)^2 + a(a-2)$ 的值.

19. 已知关于 $x$ 的一元二次方程 $x^2 - x + 2m - 2 = 0$ 有两个实数根.

(1)求 $m$ 的取值范围;

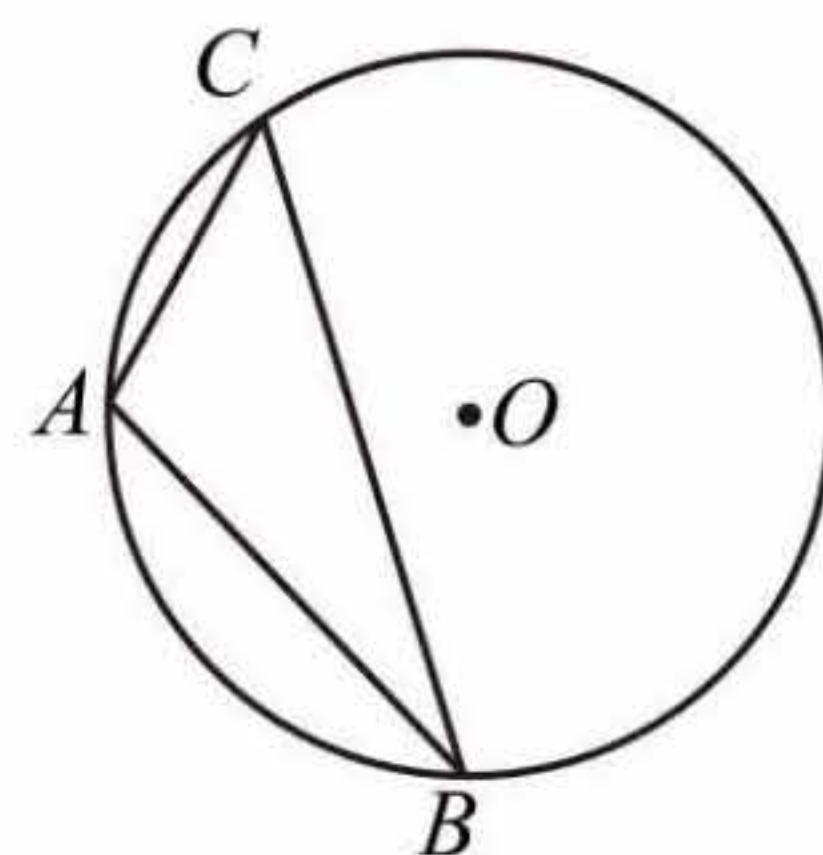
(2)当 $m$ 取最大整数值时,求方程的根.

20. 已知抛物线 $y = x^2 + bx + c$ 经过点 $(1,0)$ ,  $(0,-3)$ .

(1)求抛物线的解析式;

(2)求该抛物线的顶点坐标.

21. 如图,在 $\triangle ABC$ 中, $\angle C = 45^\circ$ ,  $AB = 2$ ,  $\odot O$ 为 $\triangle ABC$ 的外接圆,求 $\odot O$ 的半径.





22. 2023年9月23日至10月8日,第19届亚运会在杭州举行.中国队以201枚金牌、111枚银牌、71枚铜牌的优异成绩,位居奖牌榜首.为弘扬体育运动精神,某校对八、九年级学生进行了杭州亚运会知识竞赛(测试满分为100分,得分 $x$ 均为不小于80的整数),并从其中分别随机抽取了20名学生的测试成绩,整理、描述和分析如下(成绩得分用 $x$ 表示,共分成四组:A.  $80 \leq x < 85$ ; B.  $85 \leq x < 90$ ; C.  $90 \leq x < 95$ ; D.  $95 \leq x \leq 100$ ).

a. 八年级20名学生的成绩是:

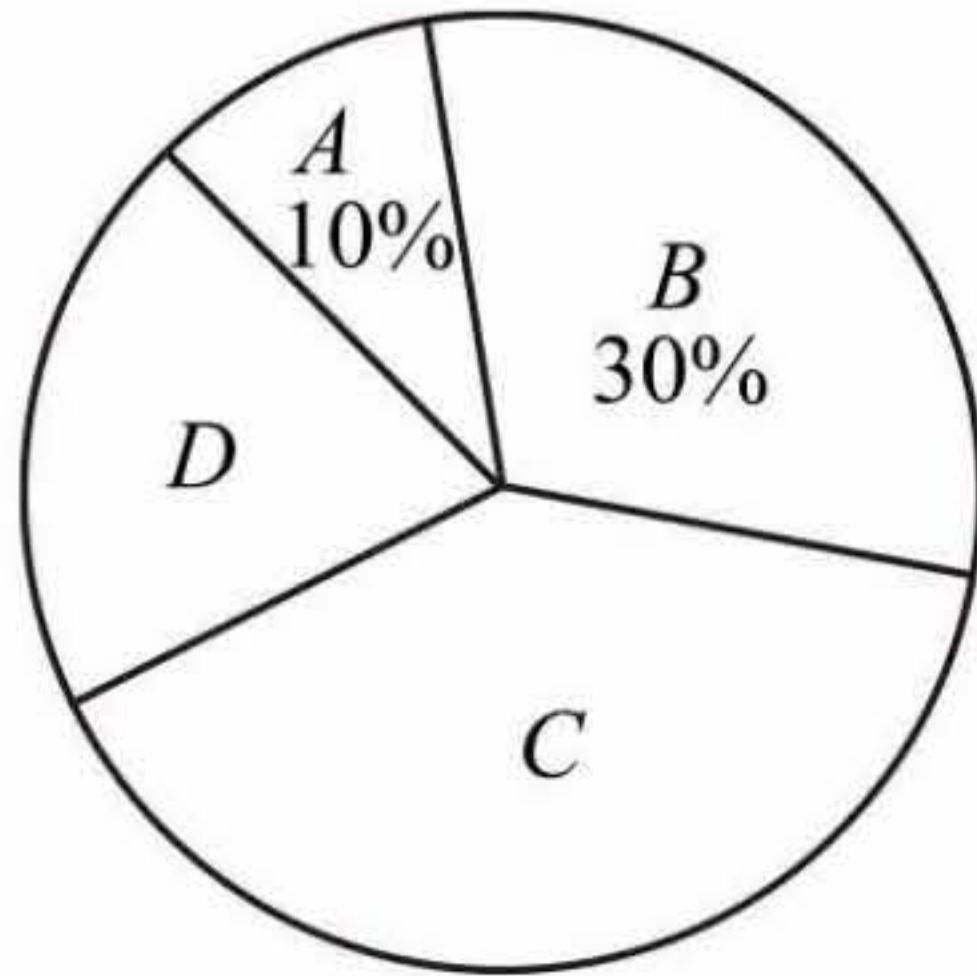
80, 82, 83, 83, 85, 85, 86, 87, 89, 90, 90, 91, 94, 95, 95, 95, 95, 96, 99, 100.

b. 九年级20名学生的成绩在C组中的数据是: 90, 90, 91, 92, 92, 93, 93, 94.

c. 八、九年级抽取的学生竞赛成绩的平均数、中位数、众数如下:

年级	平均数	中位数	众数
八年级	90	90	$m$
九年级	90	$n$	100

d. 九年级抽取的学生竞赛成绩扇形统计图如下:



根据以上信息,解答下列问题:

- 写出表中 $m, n$ 的值及九年级抽取的学生竞赛成绩在D组的人数;
- 若该校九年级共400人参加了此次知识竞赛活动,估计九年级竞赛成绩不低于90分的人数是\_\_\_\_\_;
- 为了进一步弘扬体育运动精神,学校决定组织学生开展亚运精神宣讲活动,准备从九年级抽取的竞赛成绩在D组的学生中,随机选取一名担任宣讲员,另一名担任主持人.若甲、乙是抽取的成绩在D组的两名学生,用画树状图或列表的方法,求甲、乙两人同时被选上的概率.



23. 在平面直角坐标系  $xOy$  中, 函数  $y=kx+b(k \neq 0)$  的图象经过点  $A(-1, 2)$  和  $B(1, 4)$ .

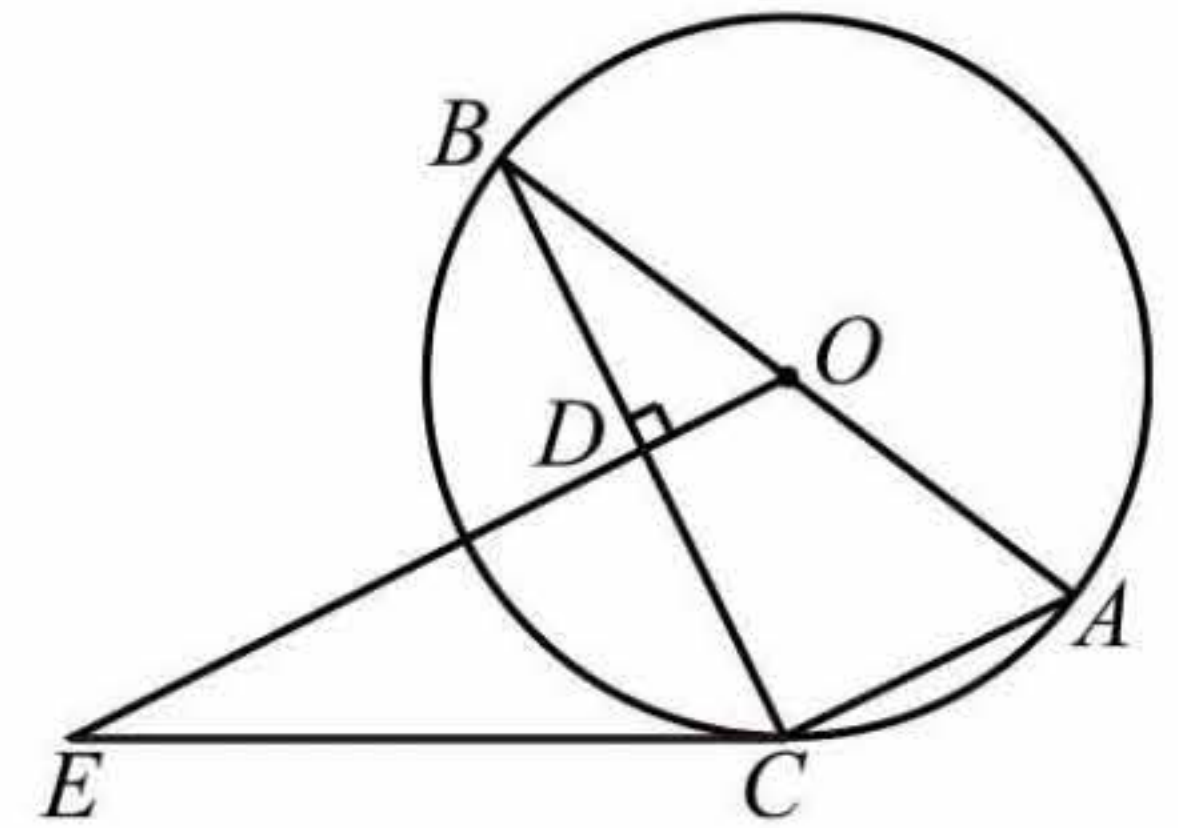
(1) 求该函数的解析式;

(2) 当  $x > 2$  时, 对于  $x$  的每一个值, 函数  $y = \frac{1}{2}x + n$  的值小于函数  $y = kx + b(k \neq 0)$  的值且大于 5, 直接写出  $n$  的值.

24. 如图,  $AB$  是  $\odot O$  的直径, 点  $C$  在  $\odot O$  上, 连接  $AC, BC$ , 过点  $O$  作  $OD \perp BC$  于点  $D$ , 过点  $C$  作直线  $CE$  交  $OD$  延长线于点  $E$ , 使得  $\angle E = \angle B$ .

(1) 求证:  $CE$  为  $\odot O$  的切线;

(2) 若  $DE = 6, CE = 3\sqrt{5}$ , 求  $OD$  的长.



25. 如图 1, 某公园一个圆形喷水池, 在喷水池中心  $O$  处竖直安装一根高度为 1.25m 的水管  $OA$ ,  $A$  处是喷头, 喷出水流沿形状相同的曲线向各个方向落下, 喷出水流的运动路线可以看作是抛物线的一部分.

建立如图 2 所示的平面直角坐标系, 测得喷出水流距离喷水池中心  $O$  的最远水平距离  $OB$  为 2.5m, 水流竖直高度的最高处位置  $C$  距离喷水池中心  $O$  的水平距离  $OD$  为 1m.

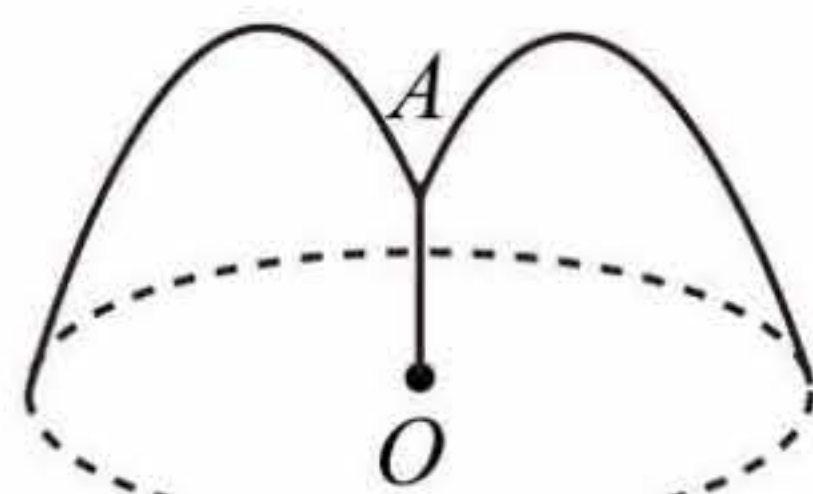


图 1

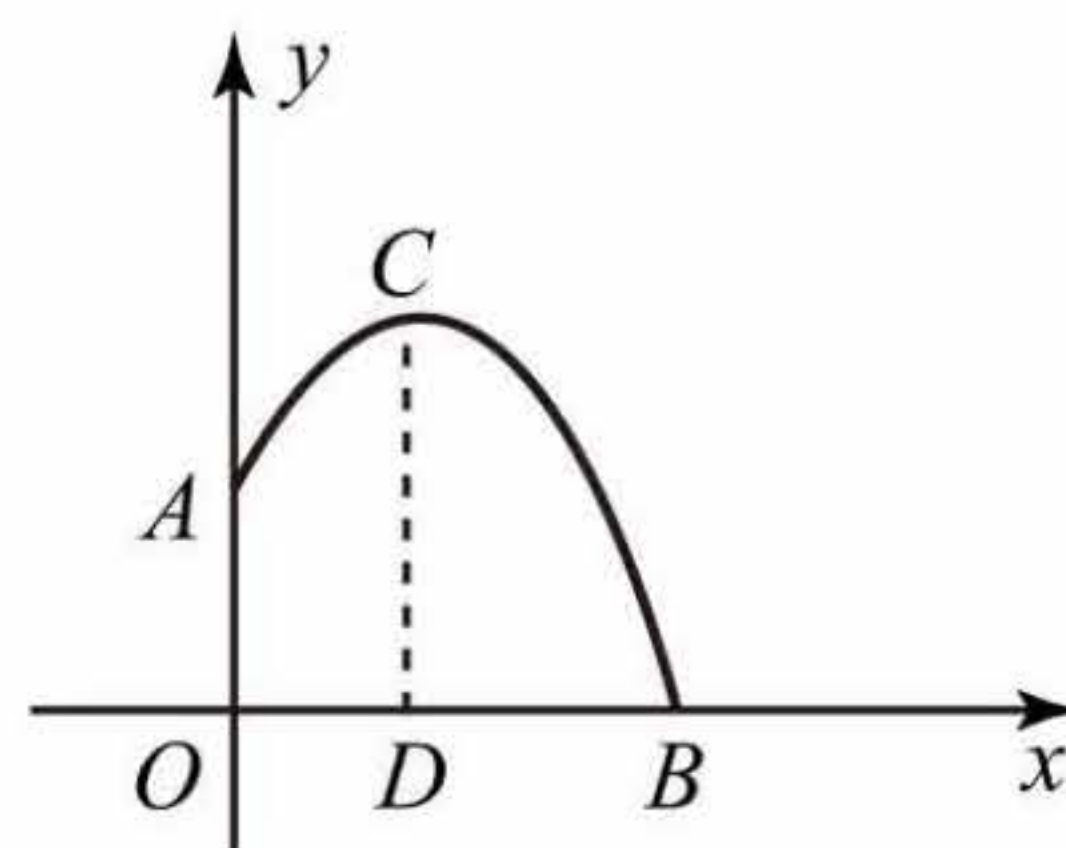


图 2

(1) 求喷出水流的竖直高度  $y$ (m) 与距离水池中心  $O$  的水平距离  $x$ (m) 之间的关系式, 并求水流最大竖直高度  $CD$  的长;

(2) 安装师傅调试时发现, 喷头竖直上下移动时, 抛物线形水流随之竖直上下移动(假设抛物线水流移动时, 保持对称轴及形状不变), 若水管  $OA$  的高度增加 0.64m 时, 则水流离喷水池中心  $O$  的最远水平距离为 \_\_\_\_\_ m.



26. 在平面直角坐标系  $xOy$  中, 点  $(2, m)$  在抛物线  $y = ax^2 + bx + c (a > 0)$  上, 设抛物线的对称轴为  $x = t$ .

(1) 当  $m = c$  时, 求  $t$  的值;

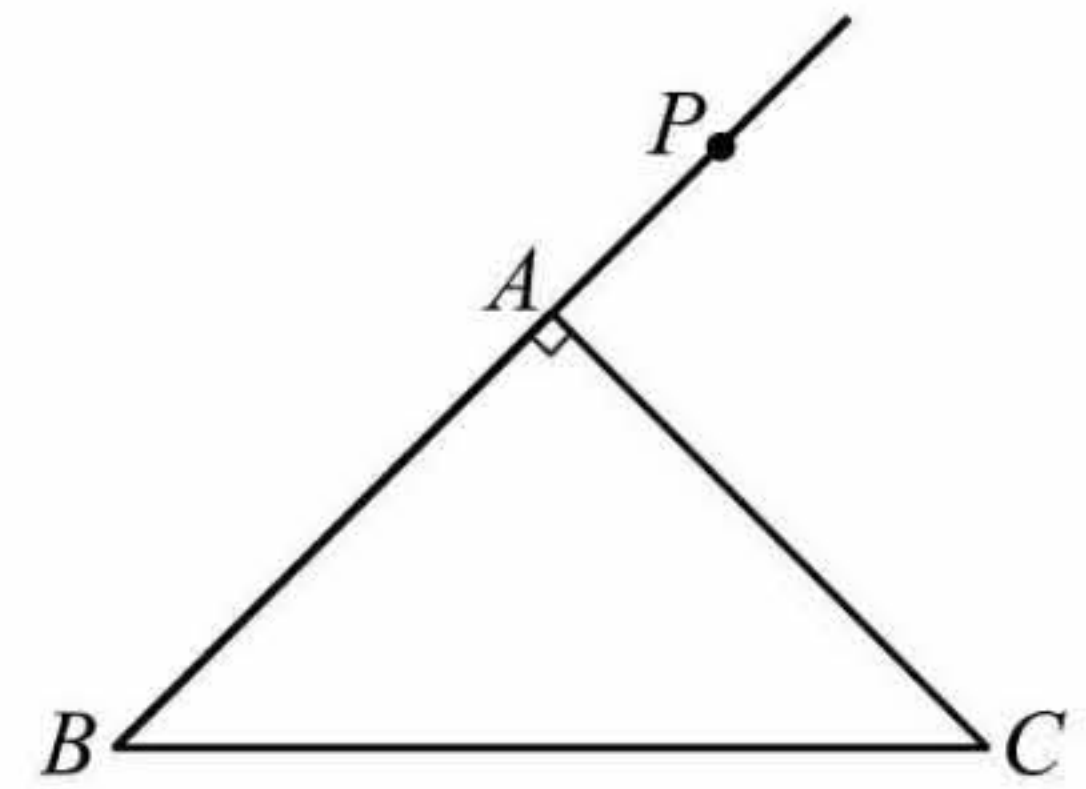
(2) 点  $(-1, y_1), (3, y_2)$  在抛物线上, 若  $c < m$ , 请比较  $y_1, y_2$  的大小, 并说明理由.

27. 在  $\triangle ABC$  中,  $\angle BAC = 90^\circ, AB = AC$ , 点  $P$  为  $BA$  的延长线上一点, 连接  $PC$ , 以  $P$  为中心, 将线段  $PC$  顺时针旋转  $90^\circ$  得到线段  $PD$ , 连接  $BD$ .

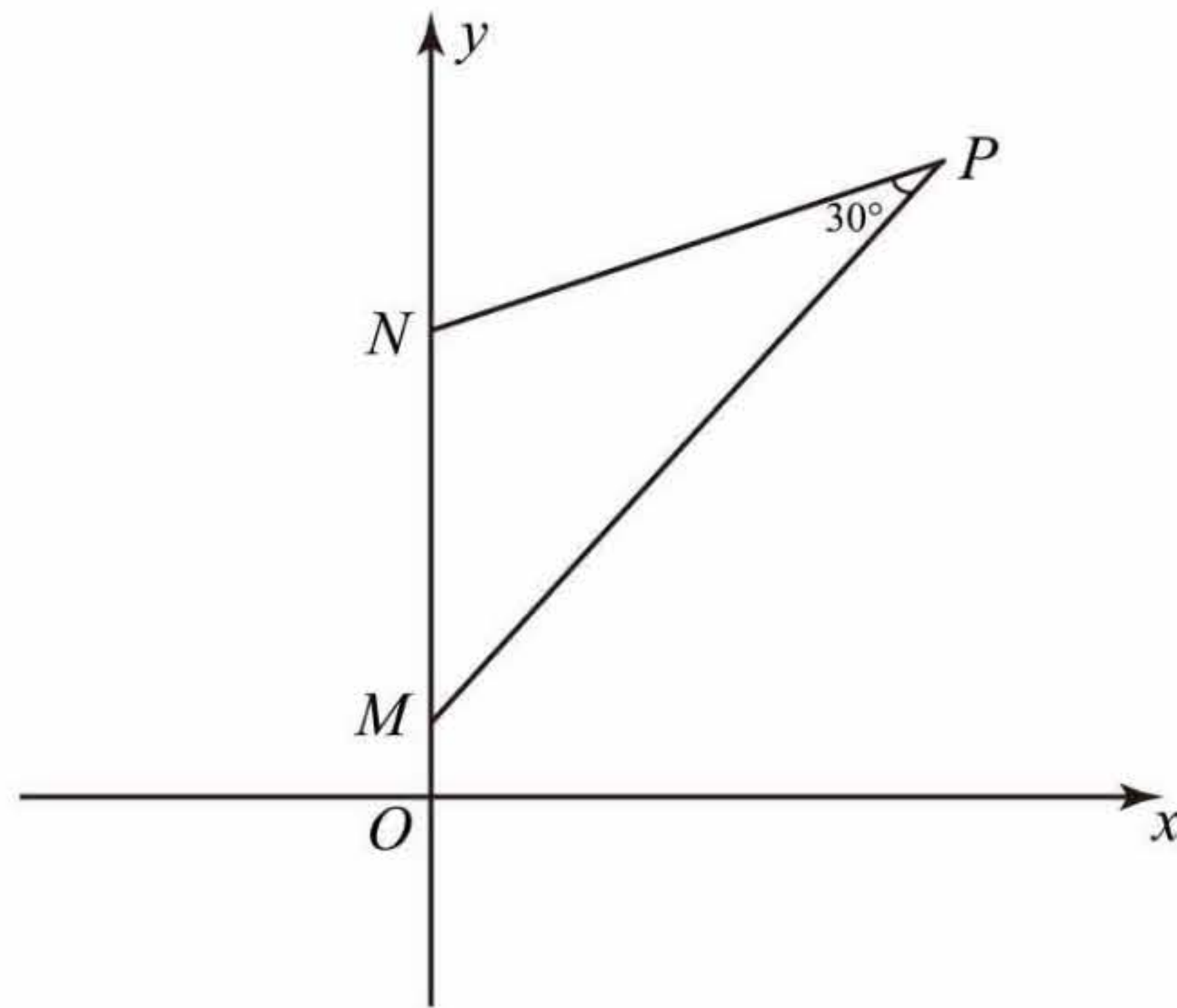
(1) 依题意补全图形;

(2) 求证:  $\angle ACP = \angle DPB$ ;

(3) 用等式表示线段  $BC, BP, BD$  之间的数量关系, 并证明.



28. 如图, 在平面直角坐标系  $xOy$  中, 已知点  $M(0, t), N(0, t+2)$ , 对于坐标平面内的一点  $P$ , 给出如下定义: 若  $\angle MPN = 30^\circ$ , 则称点  $P$  为线段  $MN$  的“亲近点”.



(1) 当  $t = 0$  时,

① 在点  $A(2\sqrt{3}, 0), B(3, 2), C(-2\sqrt{3}, 2), D(-1, -3)$  中, 线段  $MN$  的“亲近点”的是\_\_\_\_\_;

② 点  $P$  在直线  $y = 1$  上, 若点  $P$  为线段  $MN$  的“亲近点”, 则点  $P$  的坐标为\_\_\_\_\_;

(2) 若直线  $y = -\sqrt{3}x - 3$  上总存在线段  $MN$  的“亲近点”, 则  $t$  的取值范围是\_\_\_\_\_.



大兴区 2023~2024 学年度第一学期期末检测

初三数学参考答案及评分标准

一、选择题（共 16 分，每题 2 分）

题号	1	2	3	4	5	6	7	8
答案	C	A	A	B	D	D	C	A

二、填空题（共 16 分，每题 2 分）

题号	9	10	11	12	13	14	15	16
答案	$a \neq 3$	2	=	80	16	答案不唯一，如： $y = x^2 + 1$	$1200(1+x)^2 = 1452$	②③

三、解答题（共 68 分，第 17-21 题每题 5 分，第 22 题 6 分，第 23 题 5 分，第 24-26 题每题 6 分，第 27-28 题，每题 7 分）解答应写出文字说明、演算步骤或证明的过程.

17. 解:  $x^2+8x=9$ .

$x^2+8x+16=9+16$ . .....1 分

$(x+4)^2=25$ . .....2 分

$x+4=\pm 5$ . .....3 分

解得  $x_1=1, x_2=-9$ . .....5 分

18. 解:  $(a-1)^2 + a(a-2)$

$=a^2 - 2a + 1 + a^2 - 2a$  .....2 分

$=2a^2 - 4a + 1$  .....3 分

$\because a$  是方程  $x^2 - 2x - 1 = 0$  的一个根,

$\therefore a^2 - 2a - 1 = 0$ ,

$\therefore a^2 - 2a = 1$ . .....4 分

$\therefore$  原式  $= 2(a^2 - 2a) + 1$

$= 2 \times 1 + 1$

$= 3$  .....5 分

19. 解:

(1)  $\because$  方程有两个实数根,

$$\therefore \Delta \geq 0 \dots\dots\dots 1 \text{ 分}$$

$$\because \Delta = (-1)^2 - 4 \times 1 \times (2m - 2)$$

$$= 1 - 8m + 8$$

$$= 9 - 8m$$

$$\therefore 9 - 8m \geq 0$$

$$\therefore m \leq \frac{9}{8} \dots\dots\dots 2 \text{ 分}$$

(2)  $\because m \leq \frac{9}{8}$ ,  $m$  为最大整数,

$$\therefore m = 1. \dots\dots\dots 3 \text{ 分}$$

$$\therefore x^2 - x = 0.$$

$$\text{解得: } x_1 = 0, x_2 = 1. \dots\dots\dots 5 \text{ 分}$$

20. 解:

(1)  $\because$  抛物线  $y = x^2 + bx + c$  经过点  $(1, 0)$ ,  $(0, -3)$ ,

$$\therefore \begin{cases} 1 + b + c = 0 \\ c = -3 \end{cases} \dots\dots\dots 2 \text{ 分}$$

$$\text{解得 } \begin{cases} b = 2 \\ c = -3 \end{cases}.$$

$$\therefore y = x^2 + 2x - 3. \dots\dots\dots 3 \text{ 分}$$

(2)  $y = x^2 + 2x - 3.$

$$= (x + 1)^2 - 4$$

$$\therefore \text{顶点坐标为 } (-1, -4). \dots\dots\dots 5 \text{ 分}$$



21. 解: 连接  $OA, OB$ , .....1 分

$\because \angle C=45^\circ,$

$\therefore \angle AOB=2\angle C=90^\circ.$  .....2 分

在  $Rt\triangle AOB$  中,

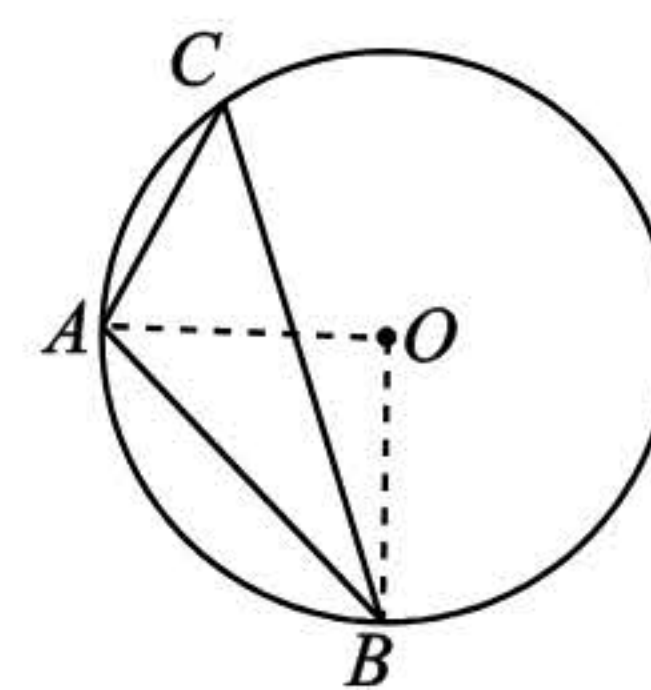
$\because OA^2+OB^2=AB^2, AB=2, OA=OB,$

$\therefore 2OA^2=4.$  .....4 分

$\therefore OA^2=2.$

$\therefore OA=\sqrt{2}$  (舍负).

$\therefore \odot O$  的半径是  $\sqrt{2}.$  .....5 分



22.解:

(1)  $m=95, n=90.5$ , 九年级抽取的学生竞赛成绩在 D 组的人数为 4 人; .....3 分

(2) 240. ....4 分

(3) 设 D 组的另外两名同学为丙, 丁.



由树状图可以看出,所有可能出现的结果共 12 种,这些结果出现的可能性相等.

甲和乙同时被选上的结果有 2 种,

所以  $P_{(甲乙同时被选上)} = \frac{2}{12} = \frac{1}{6}.$  .....6 分

23. 解:

(1) 把  $A(-1,2)$  和  $B(1,4)$  代入  $y=kx+b(k\neq 0)$  中,

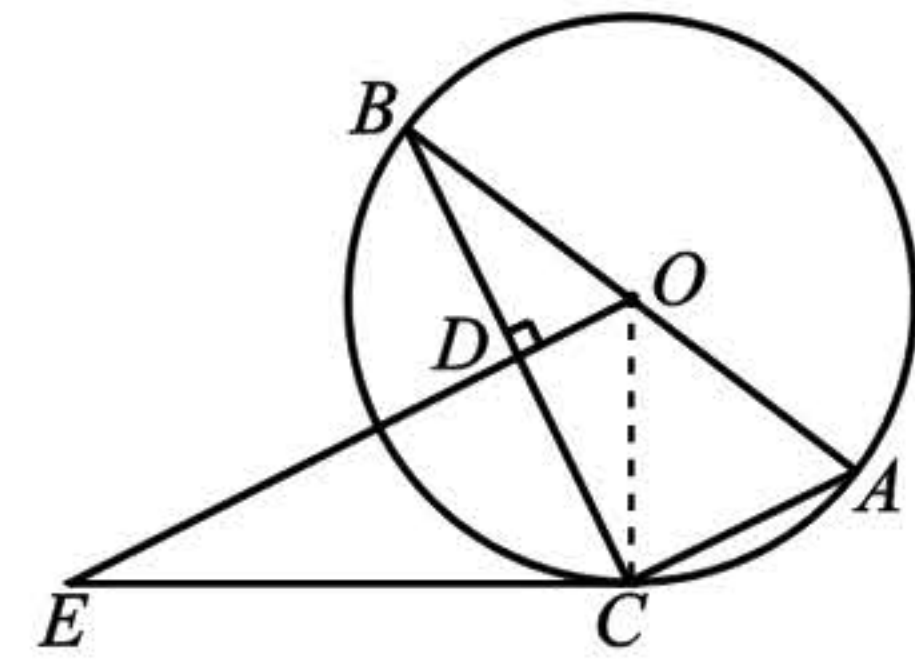
$$\begin{cases} -k+b=2, \\ k+b=4. \end{cases}$$
 .....1 分

解得:  $\begin{cases} k=1, \\ b=3. \end{cases}$  .....2 分

所以该函数的解析式为  $y=x+3.$  .....3 分

(2)  $n=4$  .....5 分





24. (1) 证明: 连接  $OC$ .

$\because OB=OC,$

$\therefore \angle B=\angle OCB.$

$\because \angle E=\angle B,$

$\therefore \angle E=\angle OCB. \dots\dots\dots 1$  分

$\because OD \perp BC,$

$\therefore \angle E+\angle DCE=90^\circ.$

$\therefore \angle OCB+\angle DCE=90^\circ.$

$\therefore \angle OCE=90^\circ.$

即  $OC \perp CE$ .

$\therefore CE$  是  $\odot O$  的切线.  $\dots\dots\dots 2$  分

(2)  $\because OD \perp BC,$

$\therefore \angle CDE=90^\circ.$

在  $Rt\triangle CDE$  中,  $DE=6, CE=3\sqrt{5},$

$\therefore CD=\sqrt{CE^2-DE^2}=3. \dots\dots\dots 3$  分

$\because OE \perp BC,$

$\therefore BC=2CD=6.$

$\therefore DE=BC. \dots\dots\dots 4$  分

$\because AB$  是直径,

$\therefore \angle ACB=90^\circ.$

$\therefore \angle CDE=\angle ACB.$

在  $\triangle ABC$  与  $\triangle CED$  中,

$$\begin{cases} \angle B = \angle E, \\ BC = DE, \\ \angle ACB = \angle CDE. \end{cases}$$

$\therefore \triangle ABC \cong \triangle CED. \dots\dots\dots 5$  分

$\therefore AC=CD=3.$

$\because O$  是  $AB$  的中点,  $D$  是  $BC$  的中点,

$\therefore OD=\frac{1}{2}AC=\frac{3}{2}. \dots\dots\dots 6$  分



25.解:

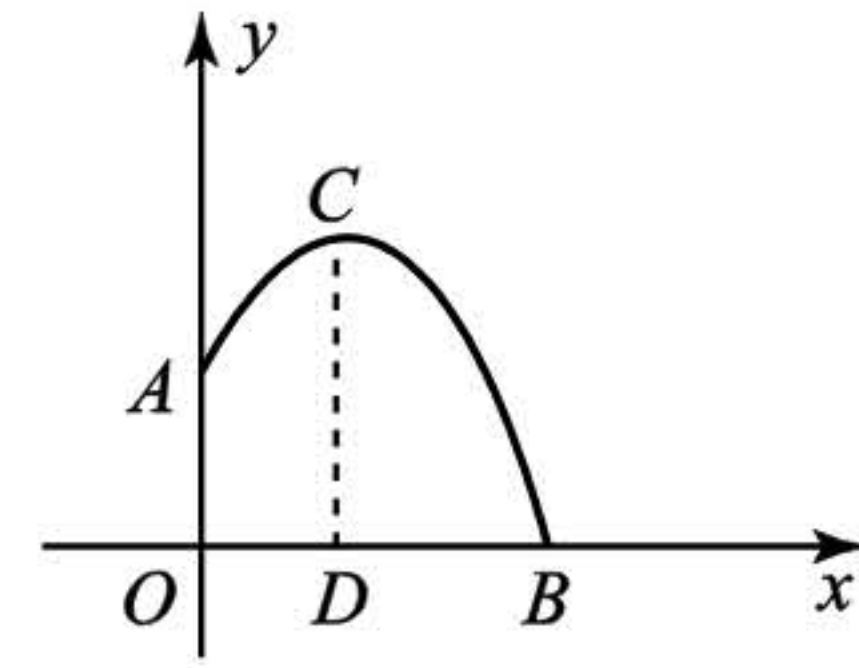
(1) 由题意,  $A$  点坐标为 $(0,1.25)$ , $B$  点坐标为 $(2.5,0)$ . .....1 分

设抛物线的解析式为  $y=a(x-1)^2+k(a\neq 0)$  ..... 2 分

$\because$  抛物线经过点  $A$ , 点  $B$ .

$$\therefore \begin{cases} 1.25 = a + k, \\ 0 = a(2.5 - 1)^2 + k. \end{cases}$$

解得:  $\begin{cases} a = -1, \\ k = 2.25. \end{cases}$



$\therefore y = -(x-1)^2 + 2.25$  ( $0 \leq x \leq 2.5$ ) ..... 3 分

$\therefore x=1$  时,  $y=2.25$ .

$\therefore$  水流喷出的最大高度为 2.25 m. .... 4 分

(2) 2.7 .....6 分

26. 解:

(1)  $\because$  点  $(2, m)$  在  $y = ax^2 + bx + c(a > 0)$  上,

$\therefore m = 4a + 2b + c$ .

又  $\because m = c$ ,

$\therefore 4a + 2b = 0$ .

$\therefore b = -2a$ .

$\therefore t = -\frac{b}{2a} = -\frac{-2a}{2a} = 1$ . .....2 分

(2)  $\because$  点  $(2, m)$  在抛物线  $y = ax^2 + bx + c(a > 0)$  上,

$\therefore m = 4a + 2b + c$ .

$\because c < m$ ,

$\therefore m - c > 0$ .

$\therefore m - c = 4a + 2b > 0$ .

$\therefore 2a + b > 0$ . .....3 分

$\because$  点  $(-1, y_1), (3, y_2)$  在抛物线  $y = ax^2 + bx + c(a > 0)$  上,

$\therefore y_1 = a - b + c, y_2 = 9a + 3b + c$ ,

$\therefore y_2 - y_1 = (9a + 3b + c) - (a - b + c) = 8a + 4b = 4(2a + b)$ . .....4 分

$\because 2a + b > 0$ ,

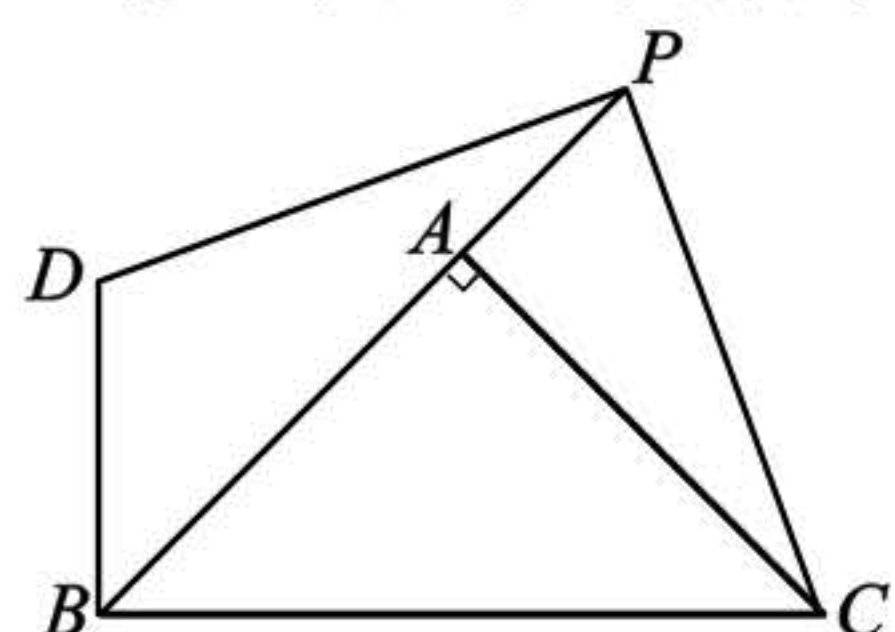
$\therefore 4(2a + b) > 0$ ,

$\therefore y_2 - y_1 > 0$ .

$\therefore y_2 > y_1$ . .....6 分



27. (1) 解: 补全图形如图所示;



.....1 分

(2) 证明:

$\because \angle BAC=90^\circ,$

$\therefore \angle ACP+\angle APC=90^\circ.$

$\because$  以  $P$  为中心, 将线段  $PC$  顺时针旋转  $90^\circ$  得到线段  $PD,$

$\therefore \angle DPC=90^\circ.$

$\therefore \angle APC+\angle BPD=90^\circ.$

$\therefore \angle ACP=\angle DPB.$  .....3 分

(3) 线段  $BC, BP, BD$  之间的数量关系是  $\sqrt{2}BP=BD+BC.$  .....4 分

证明: 过点  $P$  作  $PE \perp PB$  交  $BC$  的延长线于点  $E.$

$\because PE \perp PB,$

$\therefore \angle BPE=90^\circ.$

$\because \angle DPC=90^\circ,$

$\therefore \angle 1+\angle BPC=\angle 2+\angle BPC=90^\circ.$

$\therefore \angle 1=\angle 2.$  .....5 分

$\because AB=AC, \angle BAC=90^\circ,$

$\therefore \angle ABC=\angle ACB=45^\circ.$

$\because \angle BPE=90^\circ,$

$\therefore \angle PBE=\angle PEB=45^\circ.$

$\therefore PB=PE.$  .....6 分

在  $\triangle PBD$  与  $\triangle PEC$  中,

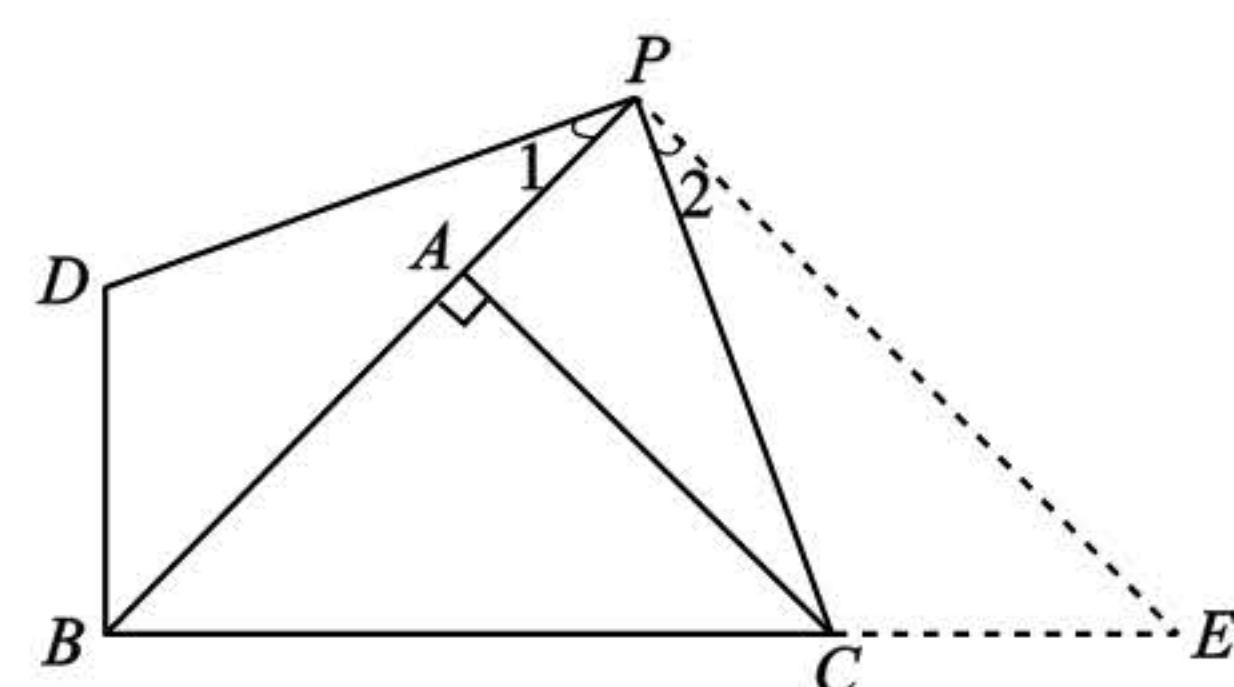
$$\begin{cases} PB=PE, \\ \angle 1=\angle 2, \\ PD=PC. \end{cases}$$

$\therefore \triangle PBD \cong \triangle PEC.$

$\therefore BD=EC.$

$\because BE=\sqrt{BP^2+PE^2}=\sqrt{BP^2+BP^2}=\sqrt{2}BP.$

$\therefore \sqrt{2}BP=BD+BC.$  .....7 分



28. 解:

(1) ①  $A, C;$  .....2 分

②  $(-\sqrt{3}-2, 1), (\sqrt{3}+2, 1);$  .....5 分

(2)  $-11 \leq t \leq 3.$  .....7 分