

2019 北京丰台区高三一模

数 学 (文)

2019. 03

(本试卷满分共 150 分, 考试时间 120 分钟)

注意事项:

1. 答题前, 考生务必先将答题卡上的学校、年级、班级、姓名、准考证号用黑色字迹签字笔填写清楚, 并认真核对条形码上的准考证号、姓名, 在答题卡的“条形码粘贴区”贴好条形码。
2. 本次考试所有答题均在答题卡上完成。选择题必须使用 2B 铅笔以正确填涂方式将各小题对应选项涂黑, 如需改动, 用橡皮擦除干净后再选涂其它选项。非选择题必须使用标准黑色字迹签字笔书写, 要求字体工整、字迹清楚。
3. 请严格按照答题卡上题号在相应答题区内作答, 超出答题区域书写的答案无效, 在试卷、草稿纸上答题无效。
4. 请保持答题卡卡面清洁, 不要装订、不要折叠、不要破损。

第一部分 (选择题 共 40 分)

一、选择题共 8 小题, 每小题 5 分, 共 40 分。在每小题列出的四个选项中, 选出符合题目要求的一项。

1. 已知全集 $U = \mathbf{R}$, $A = \{x | x > 1\}$, $B = \{x | x^2 > 1\}$, 那么 $(\partial_U A) \cap B$ 等于

- (A) $\{x | -1 < x \leq 1\}$ (B) $\{x | -1 < x < 1\}$
 (C) $\{x | x < -1\}$ (D) $\{x | x \leq -1\}$

2. 复数 $z = \frac{1}{1+i}$ 的共轭复数是

- (A) $\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i$ (B) $\frac{1}{2} - \frac{1}{2}i$
 (C) $1+i$ (D) $1-i$

3. 设命题 $P: \forall x \in \mathbf{R}, \sin x \leq 1$, 则 $\neg P$ 为

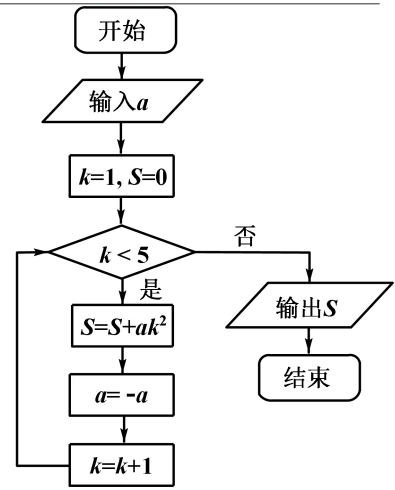
- (A) $\forall x \in \mathbf{R}, \sin x \geq 1$ (B) $\exists x_0 \in \mathbf{R}, \sin x_0 \leq 1$
 (C) $\forall x \notin \mathbf{R}, \sin x > 1$ (D) $\exists x_0 \in \mathbf{R}, \sin x_0 > 1$

4. 执行如图所示的程序框图, 如果输入的 $a=1$, 那么输出的 $S =$

- (A) 15 (B) 6
(C) -10 (D) -21

5. 已知两条直线 l, m 与两个平面 α, β , 下列命题正确的是

- (A) 若 $l // \alpha, l \perp m$, 则 $m \perp \alpha$
(B) 若 $l \perp \alpha, l // \beta$, 则 $\alpha \perp \beta$
(C) 若 $l // \alpha, m // \alpha$, 则 $l // m$
(D) 若 $\alpha // \beta, m // \alpha$, 则 $m // \beta$



6. 已知正 $\triangle ABC$ 的边长为 4, 点 D 为边 BC 的中点, 点 E 满足 $\overline{AE} = \overline{ED}$, 那么 $\overline{EB} \cdot \overline{EC}$ 的值为

- (A) $-\frac{8}{3}$ (B) -1 (C) 1 (D) 3

7. 设函数 $f(x) = \begin{cases} (\frac{1}{2})^x - 1, & x < 0, \\ x^{\frac{1}{2}}, & x \geq 0. \end{cases}$ 则使得 $f(x) \geq 1$ 的自变量 x 的取值范围为

- (A) $[-1, 1]$ (B) $[-1, 0) \cup [1, +\infty)$
(C) $(-\infty, -1] \cup (0, 1]$ (D) $(-\infty, -1] \cup [1, +\infty)$

8. 某电动汽车“行车数据”的两次记录如下表:

记录时间	累计里程 (单位: 公里)	平均耗电量 (单位: kW·h/公里)	剩余续航里程 (单位: 公里)
2019年1月1日	4000	0.125	280
2019年1月2日	4100	0.126	146

(注: 累计里程指汽车从出厂开始累计行驶的路程, 累计耗电量指汽车从出厂开始累计消耗的电量,

平均耗电量 = $\frac{\text{累计耗电量}}{\text{累计里程}}$, 剩余续航里程 = $\frac{\text{剩余电量}}{\text{平均耗电量}}$)

下面对该车在两次记录时间段内行驶 100 公里的耗电量估计正确的是

- (A) 等于 12.5 (B) 12.5 到 12.6 之间
(C) 等于 12.6 (D) 大于 12.6

二、填空题共 6 小题，每小题 5 分，共 30 分。

9. 双曲线 $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$ 的渐近线方程为_____.

10. 已知平面向量 $\mathbf{a} = (1, -3)$, $\mathbf{b} = (-2, m)$, 且 $\mathbf{a} // \mathbf{b}$, 那么 $m =$ _____.

11. 直线 $y = kx + 2$ 与圆 $x^2 + y^2 = 4$ 相交于 M, N 两点, 若 $|MN| = 2\sqrt{2}$, 则 $k =$ _____.

12. 若存在 $x \in [0, 1]$ 使不等式 $a \leq x^2 - x$ 成立, 则实数 a 的取值范围是_____.

13. 已知函数 $f(x) = \cos(2x + \varphi)$ ($-\frac{\pi}{2} < \varphi < 0$).

①函数 $f(x)$ 的最小正周期为_____;

②若函数 $f(x)$ 在区间 $[\frac{\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}]$ 上有且只有三个零点, 则 φ 的值是_____.

14. 无穷数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n , 若对任意 $n \in \mathbf{N}^*$, $S_n \in \{1, 2\}$.

①数列 $\{a_n\}$ 的前三项可以为_____;

②数列 $\{a_n\}$ 中不同的项最多有_____个.

三、解答题共 6 小题，共 80 分。解答应写出文字说明、演算步骤或证明过程。

15. (本小题 13 分)

已知 $\{a_n\}$ 是公差为 0 的等差数列, 且满足 $a_1 = 2$, a_1, a_3, a_7 成等比数列.

(I) 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式;

(II) 设 $b_n = a_n + 2^{a_n}$, 求数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和 S_n .

16. (本小题 13 分)

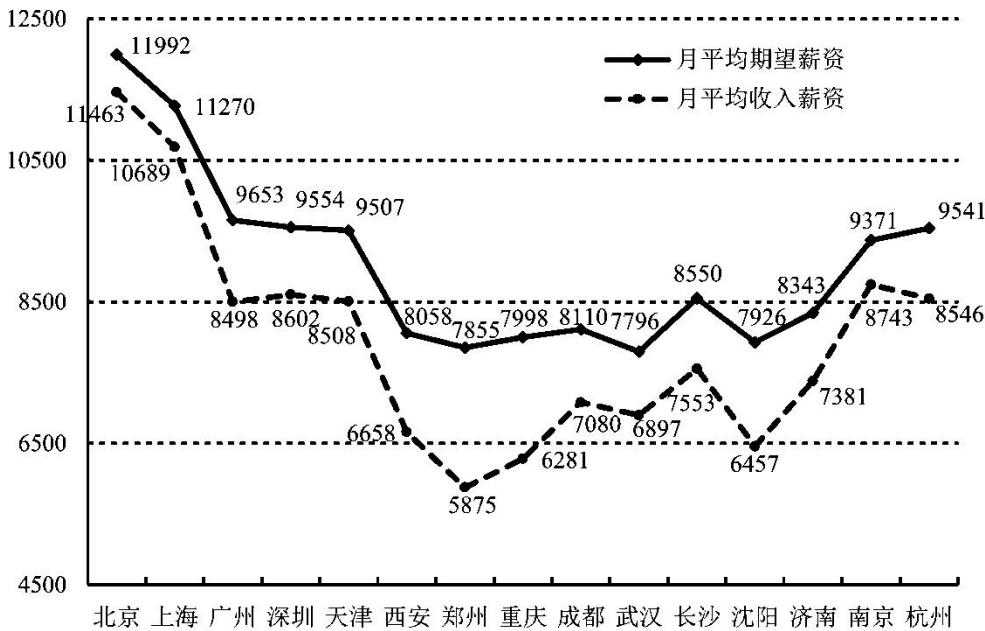
在锐角 $\triangle ABC$ 中, 角 A, B, C 所对的边分别为 a, b, c . 已知 $\cos 2C = -\frac{3}{4}$.

(I) 求 $\sin C$;

(II) 当 $c = 2a$, 且 $b = 3\sqrt{2}$ 时, 求 a .

17. (本小题 13 分)

随着经济全球化、信息化的发展，企业之间的竞争从资源的争夺转向人才的竞争，吸引、留住培养和用好人才成为人力资源管理的战略目标和紧迫任务。在此背景下，某信息网站在 15 个城市中对刚毕业的大学生的月平均收入薪资和月平均期望薪资做了调查，数据如下图所示。

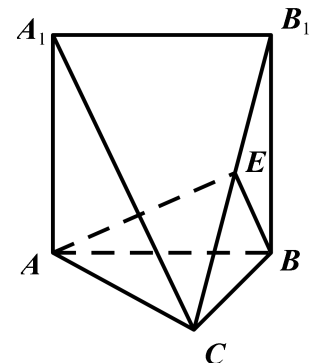


(I) 若某大学毕业生从这 15 座城市中随机选择一座城市就业，求该生选中月平均收入薪资高于 8500 元的城市的概率；

(II) 若从月平均收入薪资与月平均期望薪资之差高于 1000 元的城市中随机选择 2 座城市，求这 2 座城市的月平均期望薪资都低于 8500 元的概率。

18. (本小题 14 分)

三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 被平面 A_1B_1C 截去一部分后得到如图所示几何体， $BB_1 \perp$ 平面 ABC ， $\angle ABC = 90^\circ$ ， $BC = BB_1$ ， E 为棱 B_1C 上的动点（不包含端点），平面 ABE 交 A_1C 于点 F 。



(I) 求证： $AB \perp$ 平面 B_1BC ；

(II) 求证： $EF \parallel AB$ ；

(III) 试问是否存在点 E ，使得平面 $ABE \perp$ 平面 A_1B_1C ？并说明理由。

19. (本小题 13 分)

已知函数 $f(x) = \frac{e^x}{x} - \frac{a}{x} - a \ln x$.

- (I) 当 $a=0$ 时, 求函数 $f(x)$ 的单调区间;
- (II) 若函数 $f(x)$ 在 $x=1$ 处取得极大值, 求实数 a 的取值范围.

20. (本小题 14 分)

已知椭圆 $W: x^2 + 2y^2 = 2$, 直线 $l_1: y = kx + m (km \neq 0)$ 与椭圆 W 交于 A, B 两点, 直线 $l_2: y = kx - m$ 与椭圆 W 交于 C, D 两点.

- (I) 求椭圆 W 的离心率;
- (II) 证明: 四边形 $ABCD$ 不可能为矩形.

(考生务必将答案答在答题卡上, 在试卷上作答无效)

数学试题答案

一、选择题（共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分）

题号	1	2	3	4	5	6	7	8
答案	C	A	D	C	B	B	D	D

二、填空题（共 6 小题，每小题 5 分，共 30 分。有两空的小题，第一空 3 分，第二空 2 分）

9. $y = \pm \frac{3}{4}x$

10. 6

11. ± 1

12. $a \leq 0$

13. $\pi; -\frac{\pi}{6}$

14. 1, 1, 0（答案不唯一）； 4

三、解答题（共 6 小题，共 80 分）

15.（共 13 分）

解：（I）设 $\{a_n\}$ 的公差为 d ，因为 a_1, a_3, a_7 成等比数列，

$$\text{所以 } a_3^2 = a_1 a_7.$$

$$\text{所以 } (a_1 + 2d)^2 = a_1(a_1 + 6d).$$

$$\text{所以 } 4d^2 - 2a_1 d = 0.$$

$$\text{由 } d \neq 0, a_1 = 2 \text{ 得 } d = 1,$$

$$\text{所以 } a_n = n + 1.$$

（II）由（I）知， $b_n = a_n + 2^{a_n} = n + 1 + 2^{n+1}$ ，

$$\text{所以 } S_n = [2 + 3 + 4 + \dots + (n + 1)] + (2^2 + 2^3 + 2^4 + \dots + 2^{n+1})$$

$$= \frac{n(n+3)}{2} + \frac{4(1-2^n)}{1-2}$$

$$= 2^{n+2} + \frac{n^2 + 3n - 8}{2}.$$

16.（共 13 分）

解：（I）因为 $\cos 2C = -\frac{3}{4}$ ，所以 $1 - 2\sin^2 C = -\frac{3}{4}$ 。

$$\text{因为 } 0 < C < \frac{\pi}{2}, \text{ 所以 } \sin C = \frac{\sqrt{14}}{4}.$$

（II）由（I）可知 $\sin C = \frac{\sqrt{14}}{4}$

因为 $\triangle ABC$ 是锐角三角形，

$$\text{所以 } \cos C = \sqrt{1 - \sin^2 C} = \frac{\sqrt{2}}{4}.$$

$$\text{因为 } c = 2a, \frac{a}{\sin A} = \frac{c}{\sin C},$$

$$\text{所以 } \sin A = \frac{1}{2} \sin C = \frac{\sqrt{14}}{8}, \cos A = \frac{5\sqrt{2}}{8}.$$

$$\text{所以 } \sin B = \sin[\pi - (A + C)] = \sin(A + C) = \sin A \cos C + \cos A \sin C = \frac{3\sqrt{7}}{8}.$$

$$\text{因为 } \frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B}, b = 3\sqrt{2},$$

$$\text{所以 } a = 2.$$

17. (共 13 分)

解: (I) 设该生选中月平均收入薪资高于 8500 元的城市为事件 A ,

15 座城市中月平均收入薪资高于 8500 元的有 6 个,

$$\text{所以 } P(A) = \frac{6}{15} = \frac{2}{5}.$$

(II) 月平均收入薪资和月平均期望薪资之差高于 1000 元的城市有 6 个,

其中月平均期望薪资高于 8500 元的有 1 个, 记为 A ; 月平均期望薪资低于 8500 元的有 5 个, 记为 B_1, B_2, B_3, B_4, B_5 .

选取两座城市所有可能为:

$AB_1, AB_2, AB_3, AB_4, AB_5, B_1B_2, B_1B_3, B_1B_4, B_1B_5, B_2B_3, B_2B_4, B_2B_5, B_3B_4, B_3B_5, B_4B_5$, 共 15 种;

其中 2 座城市的月平均期望薪资都低于 8500 元的有 $B_1B_2, B_1B_3, B_1B_4, B_1B_5, B_2B_3, B_2B_4, B_2B_5, B_3B_4, B_3B_5, B_4B_5$, 共 10 种;

设 2 座城市的月平均期望薪资都低于 8500 元为事件 B ,

$$\text{所以 } P(B) = \frac{10}{15} = \frac{2}{3}.$$

18. (共 14 分)

解: (I) 因为 $BB_1 \perp \text{平面} ABC$, $AB \subset \text{平面} ABC$,

所以 $BB_1 \perp AB$.

因为 $\angle ABC = 90^\circ$,

所以 $BC \perp AB$.

因为 $BB_1 \cap BC = B$, $B_1B \subset \text{平面} B_1BC$, $BC \subset \text{平面} B_1BC$,

所以 $AB \perp$ 平面 B_1BC .

(II) 在三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中, $AB \parallel A_1B_1$.

因为 $AB \not\subset$ 平面 A_1B_1C , $A_1B_1 \subset$ 平面 A_1B_1C ,

所以 $AB \parallel$ 平面 A_1B_1C .

因为 $AB \subset$ 平面 $ABEF$, 平面 $ABEF \cap$ 平面 $A_1B_1C = EF$,

所以 $EF \parallel AB$.

(III) 存在点 E , 当点 E 为 B_1C 中点时, 平面 $ABE \perp$ 平面 A_1B_1C .

因为 $BC = BB_1$,

所以 $BE \perp B_1C$.

因为 $AB \perp$ 平面 B_1BC , $BE \subset$ 平面 B_1BC ,

所以 $AB \perp BE$.

因为 $AB \parallel A_1B_1$,

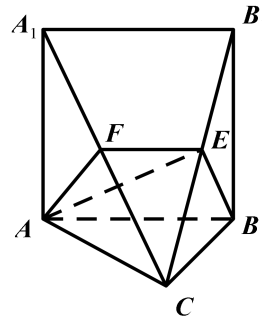
所以 $BE \perp A_1B_1$.

因为 $A_1B_1 \cap B_1C = B_1$,

所以 $BE \perp$ 平面 A_1B_1C .

因为 $BE \subset$ 平面 ABE ,

所以 平面 $ABE \perp$ 平面 A_1B_1C .



19. (共 13 分)

解: (I) $f(x)$ 定义域为 $(0, +\infty)$,

$$\text{当 } a=0 \text{ 时, } f(x) = \frac{e^x}{x},$$

$$f'(x) = \frac{e^x(x-1)}{x^2},$$

令 $f'(x) > 0$ 得 $x > 1$, 令 $f'(x) < 0$ 得 $0 < x < 1$.

所以 $f(x)$ 的增区间为 $(1, +\infty)$, 减区间为 $(0, 1)$.

$$(II) f'(x) = \frac{(e^x - a)(x-1)}{x^2}.$$

(1) 当 $a \leq e$ 时, 若 $x \in (1, +\infty)$, 则 $e^x - a \geq e^x - e > 0$.

$$\text{此时 } f'(x) = \frac{(e^x - a)(x-1)}{x^2} > 0,$$

函数 $f(x)$ 在 $x=1$ 处不可能取得极大值.

(2) 当 $a > e$ 时, $\ln a > 1$.

x	$(0,1)$	1	$(1, \ln a)$
$f'(x)$	+	0	-
$f(x)$	↗	极大值	↘

函数 $f(x)$ 在 $x=1$ 处取得极大值.

综上所述, a 的取值范围是 $(e, +\infty)$.

20. (共 14 分)

解: (I) 由题知
$$\begin{cases} a^2 = 2 \\ b^2 = 1 \\ a^2 = b^2 + c^2 \end{cases} \quad \text{解得} \begin{cases} a = \sqrt{2} \\ c = 1 \end{cases}.$$

则
$$e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{2}}{2},$$

所以椭圆 M 的离心率为 $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

(II) 由于两直线关于原点成中心对称且椭圆是关于原点的中心对称图形.

不妨设 $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2), C(-x_1, -y_1), D(-x_2, -y_2) (x_1 \neq \pm x_2)$.

则
$$\begin{cases} x_1^2 + 2y_1^2 = 2L & \text{①} \\ x_2^2 + 2y_2^2 = 2L & \text{②} \end{cases}$$

②-①得 $2(y_2^2 - y_1^2) = -(x_2^2 - x_1^2),$

$$k_{AB} \cdot k_{AD} = \frac{(y_2 - y_1)}{(x_2 - x_1)} \cdot \frac{(-y_2 - y_1)}{(-x_2 - x_1)} = \frac{y_2^2 - y_1^2}{x_2^2 - x_1^2} = -\frac{1}{2} \neq -1.$$

所以 AB 不垂直于 AD .

所以 四边形 $ABCD$ 不可能为矩形.

(若用其他方法解题, 请酌情给分)