海淀区2023—2024学年第一学期期中练习

高三数学

2023.11

本试卷共6页，150分。考试时长120分钟。考生务必将答案答在答题纸上，在试卷上作答无效。考试结束后，将本试卷和答题纸一并交回。

第一部分（选择题　共40分）

一、选择题共10小题，每小题4分，共40分。在每小题列出的四个选项中，选出符合题目要求的一项。

（1）已知集合$A=\{x\,|\,x<2\}$，$B=\{1,2\}$，则$A\cup B=$

（A）$(-\infty,2)$　　（B）$(-\infty,2]$

（C）$\{1\}$　　（D）$\{1,2\}$

（2）若复数z满足$z\cdot \mathrm{i}=\dfrac{2}{1+\mathrm{i}}$，则$z=$

（A）$-1-\mathrm{i}$　　（B）$-1+\mathrm{i}$

（C）$1-\mathrm{i}$　　（D）$1+\mathrm{i}$

（3）下列函数中，既是偶函数又在区间$(0,+\infty)$上单调递增的是

（A）$y=\ln x$　　（B）$y=x^3$

（C）$y=|\tan x|$　　（D）$y=2^{|x|}$

（4）已知向量$\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$满足$\boldsymbol{a}=(2,1)$，$\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}=(-1,2)$，则$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=$

（A）-5　　（B）0

（C）5　　（D）7

（5）设等差数列$\{a_n\}$的前n项和为S_n，且$S_5=15$，则$a_2\cdot a_4$的最大值为

（A）$\dfrac{9}{4}$　　（B）3

（C）9　　（D）36

(6) 设 $a=\log_4 6$，$b=\log_2 3$，$c=\frac{3}{2}$，则

(A) $a>b>c$　　(B) $c>b>a$

(C) $b>a>c$　　(D) $b>c>a$

(7)“$\sin\theta+\tan\theta>0$”是“θ为第一或第三象限角”的

(A) 充分而不必要条件　　(B) 必要而不充分条件

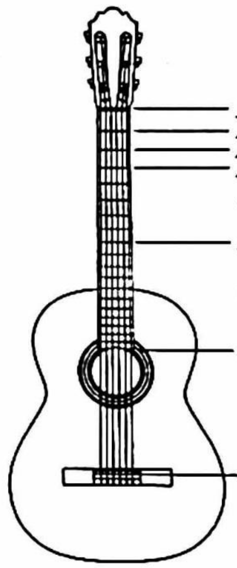
(C) 充分必要条件　　(D) 既不充分也不必要条件

(8) 在 $\triangle ABC$ 中，$\sin B=\sin 2A$，$c=2a$，则

(A) $\angle B$ 为直角　　(B) $\angle B$ 为钝角

(C) $\angle C$ 为直角　　(D) $\angle C$ 为钝角

(9) 古典吉他的示意图如图所示．A_0，B 分别是上弦枕、下弦枕，$A_i\ (i=1, 2, \cdots, 19)$ 是第 i 品丝．记 a_i 为 A_i 与 A_{i-1} 的距离，L_i 为 A_i 与 A_0 的距离，且满足 $a_i=\frac{X_L-L_{i-1}}{M}$，$i=1, 2, \cdots, 19$，其中 X_L 为弦长（A_0 与 B 的距离），M 为大于 1 的常数，并规定 $L_0=0$．则



(A) 数列 $a_1, a_2, \cdots, a_{19}$ 是等差数列，且公差为 $-\frac{X_L}{M^2}$

(B) 数列 $a_1, a_2, \cdots, a_{19}$ 是等比数列，且公比为 $\frac{M-1}{M}$

(C) 数列 $L_1, L_2, \cdots, L_{19}$ 是等比数列，且公比为 $\frac{2M-1}{M}$

(D) 数列 $L_1, L_2, \cdots, L_{19}$ 是等差数列，且公差为 $\frac{(M-1)X_L}{M^2}$

(10) 在等腰直角三角形 ABC 中，$AB=2$，M 为斜边 BC 的中点，以 M 为圆心，MA 为半径作 $\overset{\frown}{AC}$，点 P 在线段 BC 上，点 Q 在 $\overset{\frown}{AC}$ 上，则 $|\overrightarrow{AP}+\overrightarrow{MQ}|$ 的取值范围是

(A) $[0, \sqrt{10}]$　　(B) $[0, 2+\sqrt{2}]$

(C) $[2-\sqrt{2}, \sqrt{10}]$　　(D) $[2-\sqrt{2}, 2+\sqrt{2}]$

第二部分（非选择题　共110分）

二、填空题共 5 小题，每小题 5 分，共 25 分。

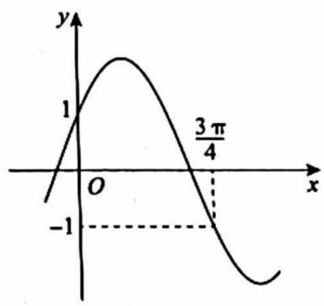
（11）函数 $f(x)=\lg(x+1)+\dfrac{1}{x}$ 的定义域是________.

（12）在平面直角坐标系 xOy 中，角 α 以 Ox 为始边，终边经过点 $P(1,-2)$，则

$\tan 2\alpha=$________.

（13）已知非零向量 $\boldsymbol{a}=x(\boldsymbol{e}_1+\boldsymbol{e}_2)$，$\boldsymbol{b}=\boldsymbol{e}_1+y\boldsymbol{e}_2$，其中 $\boldsymbol{e}_1$，$\boldsymbol{e}_2$ 是一组不共线的向量. 能使得 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的方向相反的一组实数 x，y 的值为 $x=$________，$y=$________.

（14）已知函数 $f(x)=2\sin(\omega x+\varphi)$ 的部分图象如图所示.



①函数 $f(x)$ 的最小正周期为________；

②将函数 $f(x)$ 的图象向右平移 t $(t>0)$ 个单位长度，得到函数 $g(x)$ 的图象. 若函数 $g(x)$ 为奇函数，则 t 的最小值是________.

（15）已知函数 $f(x)=\begin{cases}2^x+a,\ x<a,\\ x^2+2ax,\ x\geqslant a.\end{cases}$ 给出下列四个结论：

①当 $a=0$ 时，$f(x)$ 的最小值为 0；

②当 $a\leqslant\dfrac{1}{3}$ 时，$f(x)$ 存在最小值；

③记 $f(x)$ 的零点个数为 $g(a)$，则函数 $g(a)$ 的值域为 $\{0,1,2,3\}$；

④当 $a\geqslant 1$ 时，对任意 x_1，$x_2\in\mathbf{R}$，$f(x_1)+f(x_2)\geqslant 2f\left(\dfrac{x_1+x_2}{2}\right)$.

其中所有正确结论的序号是________.

三、解答题共 6 小题，共 85 分。解答应写出文字说明，演算步骤或证明过程。

（16）（本小题 14 分）

已知无穷等比数列 $\{a_n\}$ 的各项均为整数，其前 n 项和为 S_n，$a_2=3$，$a_1+a_3=10$.

（Ⅰ）求 $\{a_n\}$ 的通项公式；

（Ⅱ）证明：对 $\forall k\in\mathbf{N}^*$，$3S_k$，$2S_{k+1}$，S_{k+2} 这三个数成等差数列.

（17）（本小题 14 分）

已知函数 $f(x)=2\cos x\cdot\cos(x+\varphi)$ $(|\varphi|<\frac{\pi}{2})$，从条件①、条件②、条件③这三个条件中选择一个作为已知，使函数 $f(x)$ 存在.

（Ⅰ）求 φ 的值；

（Ⅱ）求 $f(x)$ 在区间 $[-\frac{\pi}{2},0]$ 上的最大值和最小值.

条件①：$f(\frac{\pi}{3})=1$；

条件②：函数 $f(x)$ 在区间 $[0,\frac{\pi}{4}]$ 上是增函数；

条件③：$\forall x\in\mathbf{R}$，$f(x)\geqslant f(\frac{2\pi}{3})$.

注：如果选择的条件不符合要求，得 0 分；如果选择多个符合要求的条件分别解答，按第一个解答计分.

（18）（本小题 14 分）

已知曲线 $C: y=4-x^2$ 与 x 轴交于不同的两点 A, B（点 A 在点 B 的左侧），点 $P(t,0)$ 在线段 AB 上（不与端点重合），过点 P 作 x 轴的垂线交曲线 C 于点 Q.

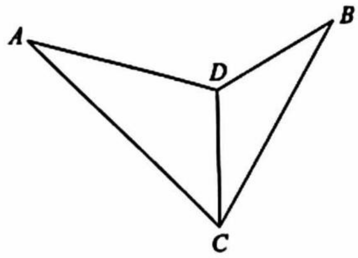
（Ⅰ）若 $\triangle APQ$ 为等腰直角三角形，求 $\triangle APQ$ 的面积；

（Ⅱ）记 $\triangle APQ$ 的面积为 $S(t)$，求 $S(t)$ 的最大值.

（19）（本小题 14 分）

某景区有一人工湖，湖面有 A，B 两点，湖边架有直线型栈道 CD，长为 50 m，如图所示．现要测量 A，B 两点之间的距离，工作人员分别在 C，D 两点进行测量，在 C 点测得 $\angle ACD=45°$，$\angle BCD=30°$；在 D 点测得 $\angle ADB=135°$，$\angle BDC=120°$．

（A，B，C，D 在同一平面内）



（Ⅰ）求 A，B 两点之间的距离；

（Ⅱ）判断直线 CD 与直线 AB 是否垂直，并说明理由．

（20）（本小题 14 分）

已知函数 $f(x)=\dfrac{\sqrt{x}+a}{x^2+b}$，且 $f(1)=\dfrac{1}{4}$，$f(4)=\dfrac{2}{19}$．

（Ⅰ）求 a，b 的值；

（Ⅱ）求 $f(x)$ 的单调区间；

（Ⅲ）设实数 m 满足：存在 $k\in\mathbf{R}$，使直线 $y=kx+m$ 是曲线 $y=f(x)$ 的切线，且 $kx+m\geqslant f(x)$ 对 $x\in[0,+\infty)$ 恒成立，求 m 的最大值．

（21）（本小题 15 分）

设无穷数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n，$\{i_n\}$ 为单调递增的无穷正整数数列，记 $A_n=S_{i_{n+1}}-S_{i_n}$（$n=1, 2, \cdots$），定义 $\Omega=\{j\in \mathbf{N}^* \mid S_k-S_j\geqslant 0, k=j+1, j+2, \cdots\}$.

（Ⅰ）若 $a_n=n$，$i_n=n^2\ (n=1, 2, \cdots)$，写出 A_1, A_2 的值；

（Ⅱ）若 $a_n=(-\frac{1}{2})^{n-1}\ (n=1, 2, \cdots)$，求 Ω；

（Ⅲ）设 $\operatorname{sgn}(x)=\begin{cases}1, & x>0,\\ 0, & x=0,\\ -1, & x<0.\end{cases}$ 求证：对任意的无穷数列 $\{a_n\}$，存在数列 $\{i_n\}$，使得 $\{\operatorname{sgn}(A_n)\}$ 为常数列.