第二十七届“希望杯”全国数学邀请赛

参考答案及评分标准

高二　第2试

 一、选择题（每题4分。）

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| 题号 | **1** | **2** | **3** | **4** | **5** | **6** | **7** | **8** | **9** | **10** |
| 答案 |  **C** | **A** | **B** | **B** | **B** | **B** | **C** | **B** | **C** | **B** |

 二、填空题（每题4分。）

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| 题号 | **11** | **12** | **13** | **14** | **15** |
| 答案 | 9900 |  |  |  | 1513 |
| 题号 | **16** | **17** | **18** | **19** | **20** |
| 答案 |  |  |  |  |  |

 三、解答题

21.设为中点，则

，

又因为　　 　 　　　，

所以　　　　　　 　　 　　 　，　　　 　　①

同理可得　　　　 　 　　 ，　 　②

联立①②两式，得　　 　　 ，　　　　　　　　　　　　　　　③

将代入③，得

，

整理，得　　　　　　　 　　　　 ，

解得　　　　　　 　　　 　，或.　　　　　　　　　　　　　 　　　（5分）

当时，；

当时，.

代入①式，得 ，或.

又因为 ，

所以 ，或，

注意到*A*是三角形的内角，可得

　　　　　　 　　，或.

于是　　　　　　　　　　　，

或　　　　　　　　　　　　.　　　　　　　　　　　　　　　（10分）

22.由，且，得

，即 ，

所以 　 .

设，则存在，使得

，，

于是有 



，

当且仅当，即，亦即时，等号成立.

所以 对于任意固定的，当且仅当时，**才有可能取得最大值.　　 （5分）

又 



.

记，显然当时，

是单调递减函数，

所以　　　　　　　　当时，取得最大值，

故 *M*的最大值是.　　　　　　　　　　　　　 （10分）







.　　　　　　　　　　　　　　　　　　　（15分）

23.（1）因为抛物线*S*的顶点在原点，焦点在*x*轴的正半轴上，所以可设抛物线*S*的方程为

.

由消去*y*，得

 　　　 　　 . (\*)

设，.

由直线*x*+*y*-1=0与抛物线*S*相交于*A*、*B*两点，可知

，是方程（\*）的两个根，

所以 ，.　　　 （4分）

于是　　　　　　　　　　　　　

 

，

又已知弦长|*AB*|=，所以

 ，

解得 *p*=，或*p*=-(舍去)，

所以抛物线*S*的方程是 　 . 　　　　　　　　　　　　　　　　　（8分）

（2）假设抛物线*S*上存在满足条件的点*C*(*x*3,*y*3)，

设*AB*的中点是*D*(*x*0,*y*0)，则

 　　　 ，，

即 .

因为△*ABC*是等边三角形，所以

*CD*⊥*AB*，且|*CD*|=|*AB*|=.

由*CD*⊥*AB*、直线*AB*:*x*+*y*-1=0和，得直线*CD*的方程是

，

即　　　　　　　　　　　　　　　　　　　，　　　　　　　　　　　　　　　 　（10分）

又点*C*在直线*CD*上，所以

 . ①

由，及点*C*到直线*AB*的距离公式，得

. 　 ②

联立①②，解得  或　　　　　　　　　　　　　　（13分）

经检验知，点不在抛物线*S*：上，所以满足题设的点*C*的坐标是

*C*(,).

故　　　　　　　　　　　　　　　　存在满足题意的点*C*(,). 　　　　　　　 　 （15分）